Corrigé de l'interro n°2

Exercice 1. On rappelle la formule du changement de variables dans $\mathbb{R}^n$: Soit T un C^1-difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans un ouvert V de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$,

$$\int_U f(x)dx = \int_V f(T^{-1}(y))\frac{1}{|\det J_T(y)|}dy,$$

où J_T est la matrice jacobienne de T.

1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. Alors,

$$\mathbb{E}(f(V,W)) = \mathbb{E}\Big(f\Big(X+Y, \frac{X}{X+Y}\Big)\Big) = \int_{\mathbb{R}^2} f\Big(x+y, \frac{x}{x+y}\Big)\Big(\frac{\lambda^4}{6}\Big)^2 x^3y^3e^{-\lambda(x+y)}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)dxdy$$

par indépendance de X et de Y. On effectue alors le changement de variables

$$\begin{array}{rccc} T: &]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\times]0,1[\\ & (x,y) & \mapsto & (v,w) = \big(x+y, \frac{x}{x+y}\big), \end{array}$$

de matrice jacobienne

$$J_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{y}{(x+y)^2} & \frac{-x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}.$$

On a alors $|\det J_T| = \frac{1}{x+y} = \frac{1}{v}$, et $(x,y) = T^{-1}(v,w) = (vw, v(1-w))$. D'où,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(V,W)) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(v,w)\Big(\frac{\lambda^4}{6}\Big)^2 v^3w^3v^3(1-w)^3e^{-\lambda v}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(v)\mathbb{1}_{[0,1]}(w)vdvdw \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(v,w)\Big(\frac{\lambda^4}{6}\Big)^2 v^7e^{-\lambda v}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(v)w^3(1-w)^3\mathbb{1}_{[0,1]}(w)dvdw. \end{aligned}$$

La densité du couple (V,W) est donc

$$\Big(\frac{\lambda^4}{6}\Big)^2 v^7e^{-\lambda v}w^3(1-w)^3\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(v)\mathbb{1}_{[0,1]}(w),$$

qui s'écrit encore

$$\frac{\lambda^8}{\Gamma(8)}v^7e^{-\lambda v}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(v)\frac{\Gamma(8)}{36}w^3(1-w)^3\mathbb{1}_{[0,1]}(w).$$

On remarque donc que la densité du couple (V,W) s'écrit comme le produit de deux fonctions mesurables positives. On obtient donc que V et W sont indépendantes, avec V de loi gamma de paramètres λ et 8, i.e. dont la densité est $\frac{\lambda^8}{\Gamma(8)}v^7e^{-\lambda v}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(v)$, et W de loi de densité $\frac{\Gamma(8)}{36}w^3(1-w)^3\mathbb{1}_{[0,1]}(w)$.

Exercice 2. 1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. Soit T le changement de variables

$$\begin{array}{rccc} T: &]0,+\infty[\times]0,2\pi[& \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ & (r,\phi) & \mapsto & (x,y) = (r\cos\phi, r\sin\phi), \end{array}$$

de matrice jacobienne $J_T = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}$, avec $\det J_T = r$. Par indépendance de X et de Y, on a

$$\mathbb{E}(f(R,\Phi)) = \mathbb{E}(f(T^{-1}(X,Y))) = \int_{\mathbb{R}^2} f\big(T^{-1}(x,y)\big)\frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy.$$

Alors par la formule du changement de variables,

$$\mathbb{E}(f(R,\Phi)) = \int_{[0,+\infty[\times[0,2\pi]} f(r,\phi)\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}rdrd\phi.$$

La densité du couple (R,Φ) est donc

$$re^{-r^2/2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(r)\frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[0,2\pi]}(\phi).$$

On remarque donc que la densité du couple (R,Φ) s'écrit comme le produit de deux fonctions mesurables positives. On en déduit donc que R et Φ sont indépendantes, avec R de loi de densité $re^{-r^2/2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(r)$, et Φ de loi uniforme sur $[0,2\pi]$.

2) Soit $S = R^2$. Alors, pour toute fonction f mesurable bornée,

$$\mathbb{E}(f(S)) = \mathbb{E}(f(R^2)) = \int_0^{+\infty} f(r^2)re^{-r^2/2}dr = \int_0^{+\infty} f(s)\frac{1}{2}e^{-s/2}ds,$$

par le changement de variable $s = r^2$. Ainsi, S suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, i.e. S a pour densité $\frac{1}{2}e^{-s/2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(s)$.

3) Soient $S_1,\dots,S_n$ des v.a. i.i.d. de même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. Alors, par indépendance de $S_1,\dots,S_n$, on a pour f borélienne bornée,

$$\mathbb{E}(f(S_1+\dots+S_n)) = \int_{[0,+\infty[^n} f(s_1+\dots+s_n)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n e^{-(s_1+\dots+s_n)/2}ds_1\cdots ds_n.$$

On effectue alors le changement de variables

$$\begin{array}{cccc} T: & [0,+\infty[^n & \to & \mathcal{S} \\ & (s_1,\dots,s_n) & \mapsto & (s_1, s_1+s_2,\dots,s_1+\dots+s_n), \end{array}$$

où $\mathcal{S} = \{(x_1,\dots,x_n) | 0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n\}$. La matrice jacobienne de T est alors

$$J_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

de déterminant 1. D'où, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(S_1+\dots+S_n)) &= \int f(x_n)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n e^{-x_n/2}\mathbb{1}_{\mathcal{S}}(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_n \\ &= \int_{[0,+\infty[} f(x_n)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n e^{-x_n/2}\left(\int \mathbb{1}_{\{0\le x_1\le\dots\le x_{n-1}\le x_n\}}dx_1\cdots dx_{n-1}\right)dx_n \end{aligned}$$

L'intégration sur le simplexe donne :

$$\int \mathbb{1}_{\{0\le x_1\le\dots\le x_{n-1}\le s\}}dx_1\cdots dx_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\int_{[0,s]^{n-1}} dx_1\cdots dx_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}s^{n-1},$$

car il y a $(n-1)!$ possibilités d'ordonner $x_1,\dots,x_{n-1}$. On obtient donc

$$\mathbb{E}(f(S_1+\dots+S_n)) = \int_{[0,+\infty[} f(s)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n e^{-s/2}\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}ds = \int_{[0,+\infty[} \frac{s^{n-1}}{\Gamma(n)}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n e^{-s/2}ds.$$

Ainsi, $S_1 + \cdots + S_n$ suit la loi gamma de paramètres n et $1/2$.
Une autre méthode possible est d'utiliser les fonctions caractéristiques. La fonction caractéristique de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ est

$$\phi_S(t) = \frac{1/2}{1/2 - it},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par indépendance de $S_1, \ldots, S_n$, on a

$$\phi_{S_1+\cdots+S_n}(t) = (\phi_{S_1}(t))^n = \left(\frac{1/2}{1/2 - it}\right)^n.$$

On reconnaît alors la fonction caractéristique de la loi gamma de paramètres $1/2$ et n. La fonction caractéristique caractérisant la loi, on en déduit que $S_1 + \cdots + S_n$ suit la loi gamma de paramètres $1/2$ et n.

Exercice 3. 1) On sait déjà que la convergence L^1 implique la convergence en probabilité. Il suffit donc de montrer l'implication inverse. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_n|) &= \mathbb{E}\big(|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| \leq \varepsilon\}}\big) + \mathbb{E}\big(|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| > \varepsilon\}}\big) \\ &\leq \varepsilon + M \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon).\end{aligned}$$

Donc, comme X_n converge en probabilité vers 0, en faisant $n \to +\infty$, puis $\varepsilon \to 0$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_n|) = 0$. Donc X_n converge dans L^1 vers 0.

2) a) X_n est le terme général d'une série qui converge presque sûrement, donc $X_n \to 0$ presque sûrement.

b) Supposons par l'absurde que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = +\infty$. Les v.a. X_n étant indépendantes, on a par Borel-Cantelli (réciproque partielle),

$$\mathbb{P}(\limsup_n \{|X_n| > \varepsilon\}) = 1.$$

Or, par a), $X_n \to 0$ p.s., ce qui est équivalent à pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\limsup_n \{|X_n| > \varepsilon\} = 0$. On obtient donc une contradiction, et donc, on a

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < +\infty.$$

3) a) X_n suit une loi exponentielle de paramètre 1, donc

$$\mathbb{P}(X_n \geq \alpha \log n) = \int_0^{\alpha \log n} e^{-x} dx = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Donc $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n \geq \alpha \log n)$ converge si $\alpha > 1$, et diverge si $\alpha \leq 1$.

b) On a $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n \geq \log n) = +\infty$, et les X_n sont indépendantes, donc par le lemme de Borel-Cantelli (réciproque partielle), on a

$$\mathbb{P}(\limsup_n \{X_n \geq \log n\}) = 1,$$

c'est-à-dire $\limsup_n \frac{X_n}{\log n} \geq 1$ presque sûrement.
Pour tout $\alpha > 1$, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n \geq \alpha \log n) < +\infty$, donc par Borel-Cantelli, on a

$$\mathbb{P}(\limsup_n \{X_n \geq \alpha \log n\}) = 0.$$

Donc $\mathbb{P}(\liminf_n \{X_n < \alpha \log n\}) = 1$, et comme $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$, pour tout événement A_n, on obtient que, $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\limsup_n \frac{X_n}{\log n} < \alpha.$$

On fait alors tendre α vers 1, et on obtient $\limsup_n \frac{X_n}{\log n} \leq 1$ p.s., et finalement presque sûrement on a

$$\limsup_n \frac{X_n}{\log n} = 1.$$

Exercice 4. 1) On a $\log Y_n = \sum_{k=1}^n \log(1+X_k)$. Or les v.a. $\log(1+X_k)$ sont indépendantes, et identiquement distribuées. De plus, $X_k \geq 0$ p.s., donc $\log(1+X_k) \geq 0$ p.s., et

$$\mathbb{E}\big(\log(1+X_k)\big) = \sum_{j\geq 0} \log(1+j)e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} < +\infty,$$

car $\log(1+j) \leq j$. Donc $\log(1+X_1)$ est intégrable, et par la loi des grands nombres, on a presque sûrement

$$\frac{1}{n}\log Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log(1+X_k) \to \mathbb{E}(\log(1+X_1)),$$

quand $n \to \infty$.

2) On a

$$\mathbb{P}(Z_n \neq 0) = \mathbb{P}(\forall i = 1,\dots,n,\ X_i \neq 0) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \neq 0) = \mathbb{P}(X_1 \neq 0)^n,$$

car les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées. Or

$$\mathbb{P}(X_1 \neq 0) = \mathbb{P}(X_1 \geq 1) = \sum_{j\geq 1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} = 1 - e^{-\lambda}.$$

Donc, $\mathbb{P}(Z_n \neq 0) = (1-e^{-\lambda})^n$.

3) On a

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(Z_n \neq 0) = \sum_{n\geq 1}(1-e^{-\lambda})^n < +\infty,$$

car $|1-e^{-\lambda}| < 1$. Donc, par le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}(\limsup_n \{Z_n \neq 0\}) = 0,$$

et donc $\mathbb{P}$-p.s., il existe $n_0 \geq 1$, tel que pour tout $n \geq n_0$, $Z_n = 0$. Ainsi, Z_n converge p.s. vers 0.

4) Comme Z_n converge p.s. vers 0, si elle converge dans L^1, c'est à fortiori vers 0. Or $Z_n \geq 0$ p.s., et

$$\mathbb{E}(Z_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \big(\mathbb{E}(X_1)\big)^n,$$

car les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées. Donc, comme X_1 suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on a $\mathbb{E}(Z_n) = \lambda^n$. Donc, Z_n converge dans L^1 vers 0 si et seulement si $0 < \lambda < 1$.

Exercice 5. 1) Tout étant positif, on a, par le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\Big(\int_0^X dt\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{t\leq X\}}dt\Big) = \int_0^{+\infty}\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{t\leq X\}}\big)dt = \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X\geq t)dt.$$

2) Posons $Y_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k$. Alors,

$$\mathbb{P}(Y_n \geq t) = \mathbb{P}\big(\cup_{k=1}^n \{X_k \geq t\}\big) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \geq t) = n\mathbb{P}(X_1 \geq t),$$

les v.a. X_k étant de même loi. On a donc $\frac{1}{n}\mathbb{P}(Y_n \geq t) \leq \mathbb{P}(X_1 \geq t)$, qui est Lebesgue intégrable car $\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X_1 \geq t)dt = \mathbb{E}(X_1) < +\infty$, par hypothèse. Or $\frac{1}{n}\mathbb{P}(Y_n \geq t) \to 0$, quand $n \to +\infty$, donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\Big(\max_{1\leq k\leq n} X_k\Big) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{n}\mathbb{P}(Y_n \geq t)dt \to 0,$$

quand $n \to +\infty$.