Université Pierre et Marie Curie
Télé-enseignement
L3 - Mathématiques

Année 2008-2009
Probabilités - LM390

Corrigé du devoir n°1

Exercice 1. 1) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\{T = n\} = \{X_1 = 0, \dots, X_{n-1} = 0, X_n = 1\}.$$

Donc, pour tout $n \geq 1$, $\{T = n\}$ est l'intersection finie d'ensembles mesurables, et donc est mesurable. Donc T est bien une variable aléatoire.

2) Par indépendance des v.a. X_i, on a

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_{n-1} = 0, X_n = 1) = (1-p)^{n-1}p,$$

pour tout $n \geq 1$. Donc T suit la loi géomètrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p.

3) Pour tout $s \in [0,1]$, la fonction génératrice de T est

$$G_T(s) = \mathbb{E}(s^T) = \sum_{n \geq 1} s^n (1-p)^{n-1} p = \frac{ps}{1-(1-p)s}.$$

L'espérance de T est donnée par $\mathbb{E}(T) = G_T'(1^-) = \frac{1}{p}$. De même, $\mathbb{E}(T(T-1)) = G_T''(1^-) = \frac{2q}{p^2}$, et donc $\mathbb{V}\mathrm{ar}(T) = \mathbb{E}(T^2) - (\mathbb{E}(T))^2 = \mathbb{E}(T(T-1)) + \mathbb{E}(T) - (\mathbb{E}(T))^2 = \frac{1-p}{p^2}$.

Exercice 2. 1) L'univers associé à cette expérience s'écrit

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \{1, \dots, N\}^n |\ x_i \neq x_j,\ \text{pour tout } i \neq j\},$$

de cardinal $\#\Omega = \mathrm{A}_N^n$ (choix de n boules différentes parmi N). L'espace de probabilité est donc $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, où $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω, donnée par $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#A}{\mathrm{A}_N^n}$, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

2) On a $\{X_i = 1\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega |\ x_i \in \{1, \dots, r\}\}$, de cardinal $\#\{X_i = 1\} = r\,\mathrm{A}_{N-1}^{n-1}$ (choix d'une boule rouge au i$^{\mathrm{e}}$ tirage et choix de $n-1$ boules parmi les $N-1$ restantes). D'où,

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{r\,\mathrm{A}_{N-1}^{n-1}}{\mathrm{A}_N^n} = \frac{r}{N}.$$

Donc, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{r}{N}$, pour tout $i = 1, \dots, n$.
De même, on remarque que $\#\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = r(r-1)\,\mathrm{A}_{N-2}^{n-2}$ (choix de deux boules rouges au deux premier tirages, et choix de $n-2$ boules parmi les $N-2$ restantes). D'où,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{r(r-1)}{N(N-1)} \neq \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1).$$

Les v.a. X_i ne sont donc pas indépendantes.

3) S_n est à valeurs dans $\{\max(0, n-N+r), \dots, \min(n,r)\}$. Pour $k \in \{\max(0, n-N+r), \dots, \min(n,r)\}$,

$$\#\{S_n = k\} = \underbrace{\mathrm{C}_n^k}_{\substack{\text{choix de la position des } k \\ \text{boules rouges parmi les } n \text{ tirées}}} \times \underbrace{\mathrm{A}_r^k}_{\substack{\text{choix de } k \text{ boules} \\ \text{rouges parmi } r}} \times \underbrace{\mathrm{A}_{N-r}^{n-k}}_{\substack{\text{choix de } n-k \text{ boules} \\ \text{blanches parmi } N-r}}$$

D'où,

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \mathrm{C}_n^k \frac{\mathrm{A}_r^k\,\mathrm{A}_{N-r}^{n-k}}{\mathrm{A}_N^n} = \frac{\mathrm{C}_r^k\,\mathrm{C}_{N-r}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}.$$

Donc, S_n suit la loi hypergéomètrique de paramètres N, n, r.
Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n) = \frac{nr}{N}$ (l'espérance de la loi de Bernoulli est $\mathbb{E}(X_1) = \frac{r}{N}$).

4) Pour $i = j$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_i) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) = \frac{r}{N}\left(1 - \frac{r}{N}\right)$ (variance d'une loi de Bernoulli).

Pour $i \neq j$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$. Or, $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{r(r-1)}{N(N-1)}$, d'où,

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{r(r-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{r}{N}\right)^2 = -\frac{r}{N}\frac{N-r}{N(N-1)}.$$

Par bilinéarité de la covariance, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) &= \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\
&= n\frac{r}{N}\frac{N-r}{N} - n(n-1)\frac{r}{N}\frac{N-r}{N(N-1)} \\
&= n\frac{r}{N}\left(1 - \frac{r}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.
\end{aligned}$$

Exercice 3. 1) Pour $k = 0$, $\mathbb{P}(X = l | N = 0) = 1$ si $l = 0$, et 0 si $l \geq 1$. Pour $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X = l | N = k) = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_N = k | N = l) = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = l | N = k) = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = l),$$

par indépendance de N et de la suite $(X_i)_{i \geq 1}$. Or $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est la somme de n v.a. indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, donc S_n suit la loi binomiale de paramètres $n, \frac{1}{2}$. Donc, pour $k \geq 1$, la loi conditionnelle de X sachant $\{N = k\}$ est la loi binomiale de paramètres $n, \frac{1}{2}$.

2) Pour $s \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) &= \sum_{l \geq 0} s^l \mathbb{P}(X = l) \\
&= \sum_{l \geq 0} \sum_{n \geq 0} s^l \mathbb{P}(X = l | N = n)\mathbb{P}(N = n) \quad \text{(en partitionnant } \Omega \text{ selon les valeurs de } N) \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} s^l \mathbb{P}(X = l | N = n)\mathbb{P}(N = n) \quad \text{(théorème de Fubini pour les séries à termes positifs)} \\
&= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{l=0}^{n} s^l \mathbb{P}(S_n = l) \right) \mathbb{P}(N = n) \\
&= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n \geq 1} G_{S_n}(s)\mathbb{P}(N = n).
\end{aligned}$$

Or $G_{S_n}(s) = G_{X_1 + \cdots + X_n}(s) = (G_{X_1}(s))^n$, car les v.a. X_i sont indépendantes et de même loi, d'où

$$G_X(s) = \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n \geq 1} (G_{X_1}(s))^n \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n \geq 0} (G_{X_1}(s))^n \mathbb{P}(N = n) = G_N \circ G_{X_1}(s),$$

car $G_{X_1}(s) \in [0, 1]$.

3) a) $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, sa fonction génératrice est alors, $G_N(s) = \sum_{n \geq 0} s^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda(s-1)}$. La fonction génératrice de X_1 est $G_{X_1}(s) = \frac{1+s}{2}$. Donc, $G_X(s) = e^{\frac{\lambda}{2}(s-1)}$. La fonction génératrice caractérisant la loi, on en déduit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{2}$.

b) $1 - X_i$ suivant aussi une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, on a que Y suit la même loi que X, i.e. $Y \sim \mathcal{P}(\frac{\lambda}{2})$. Alors, pour tout $k, n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \mathbb{P}(X = k, N - X = n) = \mathbb{P}(X = k, N = n + k) = \mathbb{P}(S_{n+k} = k)\mathbb{P}(N = n + k),$$

par indépendance de N et (X_i). D'où,

$$\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \mathrm{C}_{n+k}^{k} \frac{1}{2^{n+k}} \frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} e^{-\lambda} = e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{(\lambda/2)^n}{n!}.$$

On a donc $\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n)$, pour tout $k, n \geq 0$. Donc les v.a. X et Y sont indépendantes.

4) a) On a $G_X(s) = G_Y(s) = G_N(\frac{1+s}{2})$. Or, comme X et Y sont indépendantes, on a $G_N(s) = G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s) = G_N(\frac{1+s}{2})^2$.

b) En itérant la relation précédente, on a

$$G_N(s) = G_N\left(1 + \frac{s-1}{2}\right)^2 = G_N\left(1 + \frac{s-1}{4}\right)^4 = \cdots = G_N\left(1 + \frac{s-1}{2^n}\right)^{2^n},$$

pour tout $n \geq 1$.

c) Comme $\mathbb{E}(N) = m < \infty$, G_N est dérivable en 1 (à gauche), et un développement limité à l'ordre 1 en 1 donne

$$G_N(t) = 1 + m(t-1) + \mathrm{o}(t-1),$$

car $G_N(1) = 1$ et $G'_N(1^-) = m$. Donc, à $s \in [0,1]$ fixé, quand $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} G_N(s) &= e^{2^n \log(G_N(1+\frac{s-1}{2^n}))} = e^{2^n \log(1+m\frac{s-1}{2^n}+\mathrm{o}(\frac{1}{2^n}))} = e^{2^n (m\frac{s-1}{2^n}+\mathrm{o}(\frac{1}{2^n}))} \\ &= e^{m(s-1)+\mathrm{o}(1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{m(s-1)}. \end{aligned}$$

Donc N suit une loi de Poisson de paramètre m.

Exercice 4. 1) On a,

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k}^{\infty} (1-a)a^n = (1-a)a^k \sum_{n=0}^{\infty} (1-a)^n = a^k.$$

2) Comme X et Y sont indépendants, on a,

$$\mathbb{P}(M \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k,\ Y \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k)\mathbb{P}(Y \geq k) = a^k a^k = a^{2k}.$$

D'où,

$$\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M \geq k) - \mathbb{P}(M \geq k+1) = a^{2k} - a^{2k+2} = a^{2k}(1-a^2),$$

donc M suit une loi géometrique de parametre a^2.

3) Pour $r \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(M = k, Z = r) = \mathbb{P}(X = k, Y - X = r) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k + r) = (1-a)^2 a^{2k} a^r.$$

Pour $r < 0$, on a

$$\mathbb{P}(M = k, Z = r) = \mathbb{P}(Y = k, Y - X = r) = \mathbb{P}(Y = k, X = k - r) = (1-a)^2 a^{2k} a^{-r}.$$

Dans tous les cas,

$$\mathbb{P}(M = k, Z = r) = (1-a)^2 a^{2k} a^{|r|}.$$

4) Il s'en suit que,

$$\mathbb{P}(Z = r) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(M = k,\ Z = r) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-a)^2 a^{2k} a^{|r|} = a^{|r|} \frac{(1-a)^2}{1-a^2} = a^{|r|} \frac{(1-a)}{1+a}.$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(M = k, Z = r) = \mathbb{P}(M = k)\mathbb{P}(Z = r),$$

les variables M et Z sont donc indépendantes.

Exercice 5. 1) Pour $t < 0$, $\mathbb{P}(U \leq t) = 0$. Pour $0 \leq t < 1$, $\mathbb{P}(U \leq t) = \int_0^1 \mathbb{1}_{x \leq t} dx = t$. Pour $t \geq 1$, $\mathbb{P}(U \leq t) = 1$. Donc, la fonction de répartition de U est donnée par,

$$F_U(t) = \mathbb{P}(U \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ t, & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 1, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

2) On a $0 < U < 1$ p.s., donc X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ p.s. Donc, pour $t < 0$, $\mathbb{P}(X \leq t) = 0$, et pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\log \frac{1}{U} \leq t) = \mathbb{P}(U \geq e^{-t}) = 1 - e^{-t}.$$

La fonction de répartition de X est donc $F_X(t) = (1 - e^{-t})\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

3) La fonction de répartition de X est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc, X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, donnée par $F_X'(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$. X suit donc la loi exponentielle de paramètre 1.