Interro n°2 – 9 décembre 2009 (durée 45min).

Tous documents interdits. Soyez concis, mais justifiez scrupuleusement ce que vous faites.

Exercice 1 : Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction intégrable. On pose, pour tout $n \geq 1$, $A_n = \{|f| \geq \frac{1}{n}\}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mu(A_n) < +\infty$.

b) On pose, pour tout $n \geq 1$, $g_n = |f| \mathbb{1}_{^cA_n}$. Montrer que $\int_X g_n d\mu \to 0$ quand $n \to \infty$.

c) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$ et $\int_{^cA} |f| d\mu \leq \varepsilon$

Solution de l'exercice 1.

a) Par l'inégalité de Markov, on a $\mu(A_n) \leq n \int_X |f| d\mu < \infty$ car $f \in \mathcal{L}^1$.

b) On a $g_n \to 0$, et $g_n \leq |f| \in \mathcal{L}^1$, donc par convergence dominée $\int g_n d\mu \to 0$.

c) Par b), on a que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 t.q. $\forall n \geq n_0$, $\int g_n d\mu \leq \varepsilon$. On prend alors $A = A_{n_0}$, et on a bien $\mu(A) < \infty$ et $\int_{^cA} |f| d\mu \leq \varepsilon$.

Exercice 2 : Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives telle que

$$\int_X \sup_{n\geq 0} f_n d\mu < +\infty.$$

a) Énoncer le lemme de Fatou.

b) On pose pour tout $n \geq 0$, $g_n = \sup_{k\geq n} f_k$. Montrer que

$$\lim_n \int_X g_n d\mu = \int_X \limsup_n f_n d\mu.$$

c) Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$\sup_{k\geq n} \int_X f_k d\mu \leq \int_X g_n d\mu.$$

d) En déduire que

$$\limsup_n \int_X f_n d\mu \leq \int_X \limsup_n f_n d\mu.$$

Solution de l'exercice 2.

a) Voir cours.

b) $(g_n)_n$ est une suite décroissante qui converge vers $\limsup_n f_n = \inf_n \sup_{k\geq n} f_n$, et t.q. $g_n \leq g_0 = \sup_{n\geq 0} f_n \in \mathcal{L}^1$. Donc par convergence dominée, on a

$$\lim_n \int_X g_n d\mu = \int_X \limsup_n f_n d\mu.$$

c) Pour tout $k \geq n$, $f_k \leq \sup_{k\geq n} f_k$, donc $\int_X f_k d\mu \leq \int_X g_n d\mu$. En prenant le sup, on obtient

$$\sup_{k\geq n} \int_X f_k d\mu \leq \int_X g_n d\mu.$$

d) On fait tendre n vers l'infini dans l'inégalité précédente. Le terme de gauche tend vers $\limsup_n \int_X f_n d\mu$, et le terme de droite tend vers $\int_X \limsup_n f_n d\mu$ par la question b).