Interro n°2 – 3 décembre 2009 (durée 45min).

Tous documents interdits. Soyez concis, mais justifiez scrupuleusement ce que vous faites.

Exercice 1 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) On suppose dans cette question que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est σ-fini, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ d'ensembles mesurables de $\mathcal{A}$ telle que $X = \bigcup_{n\geq 0} X_n$ et $\mu(X_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 0$. On définit pour $x \in X$,

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\mathbb{1}_{X_n}(x)}{2^n(\mu(X_n)+1)}.$$

i) Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in X$.

ii) Montrer que f est intégrable.

b) On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ telle que $g(x) > 0$ pour tout $x \in X$. On pose pour tout $n \geq 0$,

$$X_n = \{x \in X | g(x) > \frac{1}{n+1}\}.$$

i) Montrer que $X = \bigcup_{n\geq 0} X_n$.

ii) Montrer que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est σ-fini.

Solution de l'exercice 1.

a) i) Comme $X = \bigcup X_n$, alors pour tout $x \in X$, il existe n tel que $x \in X_n$, *i.e.* $\mathbb{1}_{X_n}(x) = 1$, et comme $\mu(X_n) < \infty$, on a $f > 0$.

ii) f est mesurable positive comme limite de fonctions mesurables positives. Par convergence monotone, on a alors

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\geq 0} \int_X \frac{\mathbb{1}_{X_n}}{2^n(\mu(X_n)+1)} d\mu = \sum_{n\geq 0} \frac{\mu(X_n)}{2^n(\mu(X_n)+1)} \leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = 2.$$

b) i) Clairement $X_n \subset X$ pour tout $n \geq 0$, donc $\bigcup_{n\geq 0} X_n \subset X$. Réciproquement, si $x \in X$, alors $g(x) > 0$, donc il existe n tel que $g(x) > 1/(n+1)$, *i.e.* il existe n tel que $x \in X_n$, et donc $x \in \bigcup_{n\geq 0} X_n$.

ii) g étant positive, on a, par l'inégalité de Markov,

$$\mu(X_n) = \mu(\{g > 1/(n+1)\}) \leq (n+1) \int_X g d\mu,$$

qui est finie car $g \in \mathcal{L}^1$. Donc $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est σ-fini.

Exercice 2 : Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives. On suppose que f_n converge μ-presque partout vers une fonction f quand $n \to +\infty$, et que pour tout $n \geq 1$

$$\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu = 1.$$

a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$. *On pourra commencer par montrer que pour tout réels a et b, on a $|a-b| = a+b-2\min(a,b)$.*

b) Montrer de plus que pour toute fonction $\varphi : X \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi f_n d\mu = \int_X \varphi f d\mu.$$

Solution de l'exercice 2.

a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si $b \leq a$, $\min(a,b) = b$ et $|a-b| = a-b = a+b-2\min(a,b)$. On a de même si $a \leq b$ par symétrie. Par linéarite, on a $\int |f_n - f| = \int f_n + \int f - \int 2\min(f_n, f) = 2 - 2\int \min(f_n, f)$. Or $\min(f_n, f) \leq f$ intégrable, et $\min(f_n, f) \to f$ μ-p.p., donc par convergence dominée $\int \min(f_n, f) \to \int f = 1$.

b) φ est bornée, par disons $M > 0$. Alors φf_n et φf sont mesurables, car produits de fonctions mesurables, et intégrables car $\int_X |\varphi f_n| d\mu \leq M \int_X f_n d\mu = M$, et de même pour φf. D'où

$$\Big| \int_X \varphi f_n d\mu - \int_X \varphi f d\mu \Big| = \Big| \int_X \varphi(f_n - f) d\mu \Big| \leq M \int |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$