Université Pierre & Marie Curie (Paris 6) Licence de Mathématiques L3
UE LM364 - Intégration 1 Année 2009–2010

Interro n°1 – 7 octobre 2009 (durée 1h)

Aucun document autorisé.

Exercice 1. Soient E un ensemble, et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Trouver les limites inférieure et supérieure de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$, lorsque :

1) $A_{2n} = A$, $A_{2n+1} = B$, où A et B sont deux sous-ensembles de E.
2) $E = \mathbb{R}$, $A_{2n} =]-1, 2 + \frac{1}{n}]$, $A_{2n+1} =]-2 - \frac{1}{n}, 1]$.
3) $E = \mathbb{N}$, $A_n = \{kn |\ k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 2. Soit X un ensemble infini dénombrable.

1) Montrer que l'ensemble des parties finies de X est dénombrable.
2) Montrer que l'ensemble des parties infinies de X n'est pas dénombrable.

Exercice 3. Soit X un ensemble, et $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Soit $Y \subset X$.

1) Montrer que $\mathcal{A}(Y) = \{A \cap Y |\ A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Y.
2) Soit $i : Y \to (X, \mathcal{A})$ l'injection canonique de Y dans X. Soit $\sigma(i)$ la tribu engendrée par i, c'est-à-dire la plus petite tribu rendant i mesurable. Montrer que $\sigma(i) = \mathcal{A}(Y)$. Montrer de plus que si $Y \in \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}(Y) = \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset Y\}$.
3) Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties engendrant la tribu $\mathcal{A}$. Montrer que la classe $\mathcal{C}(Y) = \{A \cap Y |\ A \in \mathcal{C}\}$ engendre la tribu $\mathcal{A}(Y)$.