Interro n°1 – 8 octobre 2009 (durée 1h)

Aucun document autorisé.

Exercice 1. On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers.

1) Soit $\mathbb{Z}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $\mathbb{Z}_n[X]$ est dénombrable.
2) En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.
3) Un réel est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers. Montrer que l'ensemble des réels algébriques est dénombrable.
4) Un réel est dit transcendant s'il n'est pas algébrique. Montrer que l'ensemble des réels transcendants est non-dénombrable.

Exercice 2. Soit E un ensemble de cardinal supérieur ou égal à 2.

1) Quelle est la tribu engendrée par les singletons de E ?
2) Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des paires, c'est-à-dire la tribu engendrée par la classe $\big\{\{x,y\} \mid x,y \in E, x \neq y\big\}$? On distinguera les cas où Card $E = 2$, et Card $E > 2$.

Exercice 3. Soient (E,d) un espace métrique, A et B deux parties fermées de E telles que $A \cap B = \emptyset$. Soit pour toute partie non-vide U de E,

$$d(x,U) = \inf_{y \in U} d(x,y).$$

On rappelle que $x \mapsto d(x,U)$ est continue de E dans $\mathbb{R}_+$.

1) Montrer que $d(x,U) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{U}$.
2) Soit l'application $f : E \to [0,1]$ définie par

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Montrer que f est continue, que $f(x) = 0$ pour tout $x \in A$, $f(x) = 1$ pour tout $x \in B$, et que $0 < f(x) < 1$ en dehors de A et B.