Corrigé du DM

Solution de l'exercice 1 : Soit $\mathcal{S}$ la classe des singletons de E.

1) $\sigma(\mathcal{S}) = \{A \in \mathcal{P}(E) |\ A$ dénombrable ou ${}^cA$ dénombrable$\}$ (vu en TD).
2) Soit $\mathcal{C}$ la classe des paires de E.
Si $\mathrm{Card}(E) = 2$, alors $E = \{x, y\}$ et $\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, E\}$.
Si $\mathrm{Card}(E) > 2$, alors $\{x, y\}$ est dénombrable, donc $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{S})$, et donc $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{S})$. Et pour tout $x, y, z \in E$ distincts, on a
$$\{x\} = \{x, y\} \cap \{x, z\} \in \sigma(\mathcal{C}),$$
donc $\mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{C})$, et donc $\sigma(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{C})$, d'où l'égalité.

Solution de l'exercice 2 : Montrons que m est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$. On a $m(\emptyset) = \mathrm{Card}(\emptyset) = 0$. Soit $(A_n)_{n\geq1}$ une suite d'ensembles deux à deux disjoints. Plusieurs cas sont à distinguer.
1$^{\text{er}}$ cas : Si il existe un n_0 tel que A_{n_0} est infini, alors $\bigcup_n A_n$ est infini, et donc $m(\bigcup_n A_n) = +\infty$ et $\sum_n m(A_n) = \sum_{n\neq n_0} m(A_n) + m(A_{n_0}) = +\infty$.
2$^{\text{e}}$ cas : Si A_n est fini pour tout n, alors deux cas sont encore possibles. Si $\bigcup_n A_n$ est fini, alors il existe un rang N t.q. pour tout $n > N$ $A_n = \emptyset$, et donc
$$m(\bigcup_n A_n) = \mathrm{Card}(\bigcup_{n=1}^N A_n) = \sum_{n=1}^N \mathrm{Card}(A_n) = \sum_{n=1}^N m(A_n),$$
car les A_n sont disjoints. Si $\bigcup_n A_n$ est infini, alors il existe une infinité d'indices t.q. $A_n \neq \emptyset$, et donc $\mathrm{Card}(A_n) \geq 1$, et donc $\sum_n \mathrm{Card}(A_n) = +\infty = m(\bigcup_n A_n)$.
Dans tous les cas, on a bien $m(\bigcup_n A_n) = \sum_n m(A_n)$, donc m est une mesure.

Solution de l'exercice 3 :

1) f est discontinue en tout point rationnel, car si $x_0 \in \mathbb{Q}$, on a $f(x_0) > 0$, et la suite d'irrationnels $x_0 + \sqrt{2}/n$ converge vers x_0, et $f(x_0 + \sqrt{2}/n) = 0$ pour tout n. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et soit $(x_n)_n$ une suite de limite x_0. Si $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a $f(x_0) = 0 = f(x_n)$. On peut donc supposer que (x_n) est une suite de rationnels avec $x_n = p_n/q_n$, $p_n \in \mathbb{Z}^*$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$, fraction irréductible. Alors $f(x_n) = 1/q_n$, il s'agit donc de montrer que $q_n \to \infty$. Si ce n'était pas le cas, on pourrait extraire de la suite $(q_n)_n$ une suite bornée, et donc extraire une suite stationnaire $(q_{n_j})_j$, identiquement égale à un entier $q \geq 1$. La suite d'entiers $p_{n_j} = q_{n_j} x_{n_j} = q x_{n_j}$ serait alors également bornée, et on pourrait en extraire une suite stationnaire identiquement égale à un entier p. La suite extraite de $(x_n)_n$ serait constante égale à p/q. Or cette suite converge vers x_0, ce qui implique que $x_0 = p/q$. Or ceci est absurde car $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On a f borélienne car continue en dehors d'un ensemble dénombrable (TD4 exo6).
2) a) Soit $U = \{x \in X |\ \omega_g(x) < \varepsilon\}$. U est ouvert ssi il est voisinage de chacun des points, *i.e.* pour tout $x \in U$, il existe un ouvert W tel que $x \in W \subset U$. Soit $x \in X$ tel que $\omega_g(x) < \varepsilon$. Alors, par définition de l'inf, il existe un voisinage V de x, qu'on peut supposer ouvert, et tel que $\delta(g(V)) < \varepsilon$. Soit $y \in V$. Alors V est un voisinage de y, donc $\omega_g(y) \leq \delta(g(V)) < \varepsilon$, *i.e.* $y \in U$, et donc $V \subset U$.
   b) g est continue en x ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que pour tout $y \in V$, $d(g(x), g(y)) < \varepsilon/2$, *i.e.* il existe un voisinage V de x tel que $\sup_{y\in V} d(g(x), g(y)) < \varepsilon/2$. Par l'inégalité triangulaire, on a $d(g(y), g(z)) \leq d(g(x), g(y)) + d(g(x), g(y))$, donc en prenant le sup en y et z sur V, on obtient $\delta(g(V)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Donc g est continue en x ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que $\delta(g(V)) < \varepsilon$, *i.e.* pour tout $\varepsilon > 0$, $\omega_g(x) < \varepsilon$.

c) Soit C l'ensemble des points de continuité de g. Alors C s'écrit $C = \bigcap_{n\geq 1}\{x \in X |\ \omega_g(x) < \frac{1}{n}\}$, donc comme une intersection dénombrable d'ouverts.

3) Soit $q \in \mathbb{Q}$. $\{q\}$ est un fermé d'intérieur vide, donc $\{q\}^c$ est un ouvert dense, et comme $\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$, on a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}^c$.

4) Par l'absurde, si $\mathbb{Q}$ était une intersection dénombrable d'ouverts, ces ouverts seraient denses dans $\mathbb{R}$ car contenant $\mathbb{Q}$. Donc $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ serait une intersection dénombrable d'ouverts denses, donc serait dense par le théorème de Baire. Absurde.

5) Si g est continue sur $\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ est intersection dénombrable d'ouverts, or ceci est impossible.