DM à rendre la semaine du 2 novembre

Exercice 1. Soit X un ensemble, et $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Soit $Y \subset X$.

1) Montrer que $\mathcal{A}(Y) = \{A \cap Y | \ A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Y.
2) Soit $i : Y \to (X, \mathcal{A})$ l'injection canonique de Y dans X. Soit $\sigma(i)$ la tribu engendrée par i, c'est-à-dire la plus petite tribu rendant i mesurable. Montrer que $\sigma(i) = \mathcal{A}(Y)$. Montrer de plus que si $Y \in \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}(Y) = \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset Y\}$.
3) Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties engendrant la tribu $\mathcal{A}$. Montrer que la classe $\mathcal{C}(Y) = \{A \cap Y | \ A \in \mathcal{C}\}$ engendre la tribu $\mathcal{A}(Y)$.

Exercice 2. Soient X un ensemble, et m la mesure de comptage définie sur $\mathcal{P}(X)$ par $m(A) = \mathrm{Card}(A)$ si A est fini, et $m(A) = +\infty$ sinon. Montrer que $(X, \mathcal{P}(X), m)$ est un espace mesuré.

Exercice 3.

1) Soit f la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ avec } p \in \mathbb{Z}^*,\ q \in \mathbb{N}^*, \text{ et } p \wedge q = 1, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et discontinue sur $\mathbb{Q}$. f est-elle borélienne ?

2) Soit $g : X \to Y$ une application entre deux espaces métriques. On note d la distance sur Y. On définit l'oscillation de g en $x \in X$, par

$$\omega_g(x) = \inf_V \delta(g(V)),$$

où l'inf porte sur tous les voisinages de x dans X, et où

$$\delta(g(V)) = \sup_{y,z \in V} d(g(y), g(z)).$$

   a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des $x \in X$ tels que $\omega_g(x) < \varepsilon$ est un ouvert de X.
   b) Montrer que g est continue en x si et seulement si $\omega_g(x) = 0$.
   c) En déduire que l'ensemble des points de continuité de g est une intersection dénombrable d'ouverts.

3) Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est une intersection dénombrable d'ouverts dense dans $\mathbb{R}$. *Indication : Écrire* $\mathbb{Q}$ *comme l'union de ses singletons.*
4) Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas une intersection dénombrable d'ouverts. *Indication : Utiliser le théorème de Baire : Dans un espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*
5) En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.