Corrigé du devoir maison

Partie I

1) N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Donc, pour tout $s \in [-1,1]$,

$$g_N(s) = \mathbb{E}(s^N) = \sum_{n\geq 0} s^n \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n\geq 0} s^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{(s\lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{s\lambda} = e^{\lambda(s-1)},$$

en reconnaissant la série exponentielle.

2) On cherche la loi conditionnelle de X sachant $N=n$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X=k|N=n)$, pour $k \geq 0$. On peut déjà remarquer que X étant la somme d'un nombre aléatoire N de v.a. égales à 0 ou 1, sachant que $N=n$, X prend ses valeurs dans $\{0,\dots,n\}$. Donc, $\mathbb{P}(X=k|N=n)=0$ pour $k>n$. Par définition, on a $\mathbb{P}(X=k|N=n) = \frac{\mathbb{P}(X=k,N=n)}{\mathbb{P}(N=n)}$. La loi de N étant connu, il reste à déterminer le numérateur. Donc, pour $k \in \{0,\dots,n\}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k,N=n) &= \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_N=k, N=n) \\
&= \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n=k, N=n) \qquad \text{(la valeur de N étant fixée, et égale à n)} \\
&= \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n=k)\mathbb{P}(N=n),
\end{aligned}$$

par indépendance de N et $X_1+\cdots+X_n$, les v.a. $N, X_1, \dots, X_n$ étant toutes indépendantes (c'est l'indépendance "par paquets"). $X_1+\cdots+X_n$ étant la somme de n v.a. indépendantes, et de même loi de Bernoulli de paramètre p, on en déduit que $X_1+\cdots+X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n,p, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n=k) = \mathrm{C}_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}$, pour $0\leq k\leq n$. D'où,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k|N=n) &= \frac{\mathbb{P}(X=k,N=n)}{\mathbb{P}(N=n)} = \frac{\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n=k)\mathbb{P}(N=n)}{\mathbb{P}(N=n)} \\
&= \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n=k) = \mathrm{C}_n^k\, p^k(1-p)^{n-k} \qquad \text{pour } 0\leq k\leq n.
\end{aligned}$$

On a donc bien que la loi conditionnelle de X sachant $N=n$ est la loi binomiale de paramètres n,p.

3) N étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, il en est de même pour X. Calculons alors la loi de X.

- 1[re] méthode : À l'aide de la question précédente. Pour $k\in\mathbb{N}$, on a

$$\{X=k\} = \{X=k\} \cap \left(\bigcup_{n\geq 0}\{N=n\}\right) = \bigcup_{n\geq 0}\{X=k, N=n\},$$

du fait que $\Omega = \bigcup_{n\geq 0}\{N=n\}$. Cette union étant disjointe, on a alors,

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(X=k,N=n) = \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(X=k|N=n)\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n\geq k}\mathbb{P}(X=k|N=n)\mathbb{P}(N=n)$$

car $\mathbb{P}(X=k|N=n)=0$ si $k>n$. On a alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n\geq k} \mathrm{C}_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{n\geq k}\frac{n!}{k!(n-k)!}(\lambda p)^k\big(\lambda(1-p)\big)^{n-k}\frac{1}{n!}e^{-\lambda} \qquad \text{(en écrivant $n=k+n-k$)} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n\geq k}\frac{\big(\lambda(1-p)\big)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{j\geq 0}\frac{\big(\lambda(1-p)\big)^{j}}{j!} \qquad \text{(changement d'indice $j=n-k$)} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}.
\end{aligned}$$

On obtient donc que X suit la loi de Poisson de paramètre λp. Sa fonction génératrice est alors $g_X(s) = \exp\big(\lambda p(s-1)\big)$, pour $|s| \leq 1$.

- 2$^{\text{e}}$ méthode : On utilise l'indication. On a $g_X(s) = g_N \circ g_{X_1}(s)$ pour $|s| \leq 1$. La fonction génératrice de la loi de Bernoulli de paramètre p est $g_{X_1}(s) = sp + 1 - p$. D'où, comme N suit une loi de Poisson de paramètre λ,

$$g_X(s) = g_N(sp+1-p) = \exp\big(\lambda(sp+1-p-1)\big) = \exp\big(\lambda p(s-1)\big).$$

On reconnaît alors la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre λp. La fonction génératrice caractérisant la loi, on en déduit que X suit la loi de Poisson de paramètre λp, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}$, pour $k \geq 0$.

4) On a $Y = \sum_{i=1}^N (1 - X_i) = \sum_{i=1}^N Y_i$, où l'on a posé $Y_i = 1 - X_i$. Les Y_i sont alors des v.a. indépendantes, et de même loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p$. D'après la question précédente, en inversant les rôles de p et $1 - p$, on obtient alors de la même façon que Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

5) On veut montrer que les v.a. X et Y sont indépendantes, i.e. $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ pour tout $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Or, comme $N = X + Y$,

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x, N - X = y) = \mathbb{P}(X = x, N = x + y) = \mathbb{P}(X = x | N = x + y)\mathbb{P}(N = x + y).$$

Connaissant la loi de N, et la loi conditionnelle de X sachant $N = x + y$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x, Y = y) &= \mathrm{C}_{x+y}^x\, p^x (1-p)^y \frac{\lambda^{x+y}}{(x+y)!} \exp(-\lambda) \\
&= \frac{(x+y)!}{x!y!} p^x (1-p)^y \frac{\lambda^{x+y}}{(x+y)!} \exp\big(-\lambda(p+1-p)\big) \\
&= \frac{(\lambda p)^x}{x!} \exp(-\lambda p) \frac{(\lambda(1-p))^y}{y!} \exp\big(-\lambda(1-p)\big) \\
&= \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y), \qquad \text{pour tout } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0.
\end{aligned}$$

Donc, X et Y sont bien indépendantes.

Partie II

1) Pour $s \in [-1, 1]$, on a $g_N(s) = g_{X+Y}(s) = g_X(s) g_Y(s)$, car X et Y sont indépendantes. Or, comme $p = \frac{1}{2}$, X_1 et $1 - X_1$ sont des v.a. de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, donc X et Y ont même loi, et d'après l'indication, on a

$$g_X(s) = g_Y(s) = g_N \circ g_{X_1}(s) = g_N\big(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\big) = g_N\big(1 + \frac{s-1}{2}\big).$$

On obtient donc $g_N(s) = \big(g_N(1 + \frac{s-1}{2})\big)^2$.

2) En itérant la relation précédente, on obtient,

$$g_N(s) = \left(g_N\Big(1+\frac{s-1}{2}\Big)\right)^2 = \left(g_N\Big(1+\frac{1+\frac{s-1}{2}-1}{2}\Big)\right)^4 = \left(g_N\Big(1+\frac{s-1}{2^2}\Big)\right)^{2^2} = \cdots = \left(g_N\Big(1+\frac{s-1}{2^n}\Big)\right)^{2^n},$$

pour tout $n \geq 1$.

3) On suppose que $\mathbb{E}(N) = m < \infty$, donc g_N est dérivable en 1 (à gauche), et on peut écrire

$$g_N(t) = g_N(1) + g_N'(1)(t-1) + \mathrm{o}(t-1) = 1 + m(t-1) + \mathrm{o}(t-1),$$

car $g_N(1) = 1$, et $g_N'(1) = \mathbb{E}(N) = m$. D'où, en prenant $t = 1 + \frac{s-1}{2^n}$ (t tend vers 1 quand $n \to \infty$),

$$g_N(s) = \left(g_N\Big(1 + \frac{s-1}{2^n}\Big)\right)^{2^n} = \exp\left(2^n \ln g_N\Big(1 + \frac{s-1}{2^n}\Big)\right) = \exp\left(2^n \ln\Big(1 + m\frac{s-1}{2^n} + \mathrm{o}(\frac{s-1}{2^n})\Big)\right).$$

Or $\ln(1+u) = u + \mathrm{o}(u)$, d'où,

$$g_N(s) = \exp\left(2^n\left(m\frac{s-1}{2^n} + \mathrm{o}(\frac{s-1}{2^n})\right)\right) = \exp\big(m(s-1) + \mathrm{o}(s-1)\big) \longrightarrow \exp\big(m(s-1)\big), \quad \text{quand } n \to \infty.$$

4) On a $g_N(s) = \exp\big(m(s-1)\big)$, pour $s \in [-1,1]$. On reconnaît ici la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre m. La fonction génératrice caractérisant la loi, on en déduit que N suit une loi de Poisson de paramètre m. Calculons alors sa variance $\mathbb{V}\mathrm{ar}(N) = \mathbb{E}(N^2) - \big(\mathbb{E}(N)\big)^2$. Par un calcul direct, le moment d'ordre 2 est donné par

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N^2) &= \sum_{n\geq 0} n^2 \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n\geq 0} n^2 \frac{m^n}{n!}e^{-m} \\
&= \sum_{n\geq 0} n(n-1)\frac{m^n}{n!}e^{-m} + \sum_{n\geq 0} n\frac{m^n}{n!}e^{-m} \qquad \text{(en écrivant } n^2 = n(n-1)+n) \\
&= \sum_{n\geq 2} \frac{m^n}{(n-2)!}e^{-m} + \mathbb{E}(N) \\
&= \sum_{j\geq 0} \frac{m^j}{j!} m^2 e^{-m} + m \qquad \text{(changement d'indice } j = n-2) \\
&= m^2 + m.
\end{aligned}$$

On obtient donc $\mathbb{V}\mathrm{ar}(N) = \mathbb{E}(N^2) - \big(\mathbb{E}(N)\big)^2 = m^2 + m - m^2 = m$. La variance d'une loi de Poisson est donc donnée par son paramètre.

Autre méthode : on utilise la fonction génératrice. En dérivant deux fois, on obtient $g_N''(s) = m^2 \exp\big(m(s-1)\big)$. En faisant tendre s vers 1, on obtient alors $\mathbb{E}(N(N-1)) = g_N''(1) = m^2$. D'où, $\mathbb{E}(N^2) = \mathbb{E}(N(N-1)) + \mathbb{E}(N) = m^2 + m$, et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(N) = \mathbb{E}(N^2) - \big(\mathbb{E}(N)\big)^2 = m^2 + m - m^2 = m$.