Université Paris 6 P. et M. Curie 2006–2007
LM231

Devoir Maison - À rendre la semaine du 31 avril

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p, $(0 < p < 1)$. Soit N une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_i)_{i\geq 1}$. On introduit les variables aléatoires $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$, et $Y = \sum_{i=1}^{N}(1-X_i)$, de telle sorte que $X+Y = N$ (avec la convention $\sum_{i=1}^{0} = 0$).

Partie I

Dans cette partie, on suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ, $(\lambda > 0)$.

1) Calculer la fonction génératrice g_N de N.
2) Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $N = n$ est la loi binomiale de paramètres n, p, pour $n \geq 0$ fixé.
3) Calculer la loi de X, ainsi que sa fonction génératrice g_X.
4) Calculer de même la loi de Y.
5) Montrer que X et Y sont indépendantes.

Partie II

Dans cette partie, on suppose que X et Y sont indépendantes, et on cherche à déterminer la loi de N. On suppose que $p = \frac{1}{2}$, et que $\mathbb{E}(N) = m < \infty$, $(m > 0)$.

1) Montrer que $g_N(s) = \big(g_N(1 + \frac{s-1}{2})\big)^2$, pour $s \in [-1, 1]$.
2) En déduire que $g_N(s) = \big(g_N(1 + \frac{s-1}{2^n})\big)^{2^n}$, pour tout $n \geq 1$.
3) En effectuant un développement limité en 1 de g_N, montrer que $g_N(s) = \exp\big(m(s-1)\big)$.
4) En déduire la loi de N, et calculer sa variance $\mathbb{V}\mathrm{ar}(N)$.

Indication : Dans tout cet exercice, on pourra utiliser, sans le redémontrer, le fait (vu en TD) que $g_X(s) = g_N \circ g_{X_1}(s)$, *pour* $s \in [-1, 1]$.