Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Licence 3, 2013–2014, Introduction à l'analyse fonctionnelle

Partiel du 14 mars 2014 – Durée 1h30

Tout document interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits. Toute utilisation d'un résultat du cours devra être soigneusement justifiée.

Dans tout l'énoncé, $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ *désigne l'espace de Banach des fonctions réelles continues sur* $[0,1]$*, muni de la norme* $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$*. Les trois exercices sont indépendants.*

Exercice 1. Soit $l^\infty = \{(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{n\geqslant 0} |a_n| < \infty\}$, et on pose $||a||_\infty = \sup_{n\geqslant 0} |a_n|$ pour $a = (a_n)_{n\geqslant 0} \in l^\infty$. Après avoir vérifié que $(l^\infty, ||\cdot||_\infty)$ est bien un espace vectoriel normé, montrer que $(l^\infty, ||\cdot||_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 2. Soit $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs, et telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$. On note V le sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré par les fonctions $1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots, x^{\lambda_n}, \ldots$ Soit m un entier tel que $m \neq \lambda_k$ pour tout $k \geqslant 1$. On définit par récurrence les fonctions continues sur $[0,1]$ suivantes :

$$Q_0(x) = x^m,$$

et pour tout $n \geqslant 1$,

$$Q_n(x) = (\lambda_n - m)x^{\lambda_n} \int_x^1 Q_{n-1}(t) t^{-1-\lambda_n} dt,$$

pour tout $x \in [0,1]$.

1) Montrer que $||Q_0||_\infty = 1$ et que pour tout $n \geqslant 1$,
$$||Q_n||_\infty \leqslant \left|1 - \frac{m}{\lambda_n}\right| ||Q_{n-1}||_\infty.$$
2) En déduire que $||Q_n||_\infty \leqslant \prod_{i=1}^n |1 - \frac{m}{\lambda_i}|$, puis que
$$||Q_n||_\infty \to 0, \quad \text{quand } n \to \infty.$$
3) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, Q_n s'écrit sous la forme
$$Q_n(x) = x^m - \sum_{i=1}^n a_i^{(n)} x^{\lambda_i},$$
pour certains réels $a_i^{(n)}$ (on ne demande pas de les calculer explicitement).
4) En déduire que tout polynôme sur $[0,1]$ s'approxime uniformément par une suite d'éléments de V.
5) En déduire que V est dense dans $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$.

Exercice 3. Soit E_1 l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $||\cdot||_1$ définie par $||f||_1 = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$. On fixe un $\alpha \in E_1$ tel que

$$0 \leqslant \alpha(x) \leqslant 1, \quad \text{pour tout } x \in [0,1],$$

et on note $a = ||\alpha'||_\infty$. On définit une application $T\colon E_1 \to E_1$ par

$$Tf(x) = \alpha(x) f\Big(\frac{x}{2}\Big) + \big(1 - \alpha(x)\big) f\Big(\frac{x+1}{2}\Big), \quad \text{pour } f \in E_1.$$

1) Montrer que pour tout $f \in E_1$, on a $||Tf||_\infty \leqslant ||f||_\infty$, et que
$$||(Tf)'||_\infty \leqslant 2a||f||_\infty + \frac{1}{2}||f'||_\infty.$$
2) En déduire que T est une application linéaire continue de E_1 dans E_1.
3) On pose $L = \{f \in E_1 \mid Tf = f\}$, et $B_L = \{f \in L \mid ||f||_1 \leqslant 1\}$. Montrer que L est un sous-espace vectoriel fermé de E_1.
4) Montrer que B_L est une famille équicontinue. *(Penser au T.A.F.)*
5) Montrer que si $f \in L$, alors
$$||f'||_\infty \leqslant 4a||f||_\infty,$$
et en déduire que $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_\infty$ sont deux normes équivalentes sur L.
6) Montrer que B_L est une partie compacte de $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$.
7) Montrer alors que pour toute suite $(f_n)_n$ de B_L, on peut extraire une sous-suite convergente pour la norme $||\cdot||_1$. Que peut-on dire sur la dimension de L ?