Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Licence 3, 2013–2014, MLM631 - Introduction à l'analyse fonctionnelle

Examen du 5 mai 2014 – Durée 1h30

Tout document interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits. Toute utilisation d'un résultat du cours devra être soigneusement justifiée.

Barème approximatif : Exo 1 : 10 points, Exo 2 : 10 points, Exo 3 : 5 points

Exercice 1. On considère l'équation différentielle suivante

$$x''(t) - (x(t))^3 = g(t),$$

où $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. On cherche à trouver une condition sur g assurant que l'équation différentielle possède une unique solution sur $[0,1]$ s'annulant en 0 et en 1.

Soit $F = C([0,1])$ l'espace de Banach des fonctions réelles continues muni de la norme de la convergence uniforme $||\cdot||_\infty$, et

$$E = \{\varphi \in C^2([0,1]) \,|\, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$$

l'espace des fonctions de classe C^2 sur $[0,1]$ s'annulant en 0 et en 1. On munit E de la norme $||\cdot||_E$ définie par

$$||\varphi||_E = |\varphi'(0)| + ||\varphi''||_\infty, \quad \text{pour } \varphi \in E,$$

et on admettra que $(E, ||\cdot||_E)$ est un espace de Banach.

1) Soit $\varphi \in E$. En appliquant judicieusement le théorème des accroissements finis à φ puis à φ', montrer que
$$||\varphi||_\infty \leqslant ||\varphi'||_\infty \leqslant ||\varphi||_E.$$
2) Soit $\Phi\colon E \to F$ définie par $\Phi(\varphi) = \varphi'' - \varphi^3$. Montrer que Φ est différentiable, de différentielle $d\Phi_\varphi$ au point φ donnée par
$$d\Phi_\varphi(h) = h'' - 3\varphi^2 h, \quad \text{pour tout } h \in E.$$
3) Montrer que Φ est de classe C^1.
4) On note 0 l'application nulle. Montrer que $d\Phi_0\colon E \to F$ est bijective.
5) En déduire qu'il existe U un voisinage ouvert de 0 dans E, V un voisinage ouvert de 0 dans F tels que $\Phi\colon U \to V$ soit un C^1-difféomorphisme.
6) En déduire alors qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que pour toute fonction $g \in F$ telle que $||g||_\infty < \alpha$, il existe une unique solution φ à l'équation différentielle de l'énoncé.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}^p$,

$$||\partial_2 f_{(\lambda,x)}|| \leqslant k,$$

où $\partial_2 f_{(\lambda,x)}$ désigne la différentielle partielle de f par rapport à la seconde variable au point (λ, x) et $||\cdot||$ la norme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ associée à n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^n$.

1) À l'aide d'un argument de point fixe, montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^p$, il existe un unique $x(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\lambda, x(\lambda)) = x(\lambda)$.
2) On considère l'application $g\colon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par
$$g(\lambda, x) = x - f(\lambda, x).$$
Calculer $\partial_2 g_{(\lambda,x)}$.
3) Montrer que $\partial_2 g_{(\lambda,x)}$ est inversible d'inverse $\sum_{j=0}^{\infty} [\partial_2 f_{(\lambda,x)}]^j$, où $[u]^j$ désigne l'application u composée j-fois avec elle-même $u \circ \cdots \circ u$.
4) Soit λ_0 fixé, et $x(\lambda_0)$ le point fixe de f associé. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de λ_0, un voisinage ouvert U de $x(\lambda_0)$ et une fonction h définie sur V de classe C^1 telle que l'assertion $(\lambda, x) \in V \times U$ et $g(\lambda, x) = 0$ soit équivalente à $\lambda \in V$ et $x = h(\lambda)$.
5) En déduire que l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est de classe C^1 sur V, puis sur tout $\mathbb{R}^p$.
6) Exprimer la différentielle de l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ en fonction des différentielles partielles de f.

Exercice 3. Soit $E = C([0, \frac{\pi}{2}])$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ muni de la norme de la convergence uniforme $||\cdot||_\infty$. On considère l'application $T\colon E \to E$ définie par

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\cos(t)dt,$$

pour $f \in E$ et tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1) Montrer que T est une application linéaire continue.
2) Montrer que l'image par T de la boule fermée unité de E est relativement compact dans E.