Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Licence 3, 2013–2014, Introduction à l'analyse fonctionnelle

Corrigé de l'exo 3 du TD n°5

Exercice. Soit c_0 l'espace de Banach des suites réelles tendant vers 0, muni de la norme $||x||_\infty = \sup_n |x_n|$. Soit f la fonction définie sur c_0 par

$$f\colon x = (x_n)_{n\geqslant 0} \mapsto f(x) = y = (y_n)_{n\geqslant 0}, \quad \text{où} \quad y_n = \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}.$$

1) Montrer que f est une fonction continue de c_0 dans c_0.
2) On considère le problème de Cauchy

$$x' = f(x), \quad \text{avec} \quad x(0) = 0.$$

Peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz ? Le théorème de Cauchy-Peano-Arzelà ?
3) Soit $a > 0$. On suppose que $x \in C(]-a, a[, c_0)$ est une solution du problème de Cauchy précédent. Montrer que

$$x_n(t) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{x_n'(t)}{\sqrt{x_n(t)}} > 1,$$

pour tout $n \geqslant 0$ et tout $t \in]0, a[$.
4) En appliquant le théorème des accroissements finis à $t \mapsto \sqrt{x_n(t)}$, montrer que pour tout $t \in [0, a[$, $x_n(t) \geqslant t^2/4$.
5) Conclusion ?

Solution :

1) f est bien à valeurs dans c_0 car si $x_n \to 0$, alors $\sqrt{|x_n|} \to 0$ et $\frac{1}{n+1} \to 0$, donc $y_n \to 0$. Montrons que f est continue. Soit $(x^{(n)})_n$ une suite de c_0 telle que $x^{(n)} \to x \in c_0$ pour la norme $||\cdot||_\infty$, avec $x^{(n)} = (x_j^{(n)})_j$ et $x = (x_j)_j$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, pour tout $j \geqslant 0$,

$$|x_j^{(n)} - x_j| \leqslant \varepsilon.$$

Notons $y^{(n)} = f(x^{(n)})$ et $y = f(x)$. Alors,

$$\begin{aligned} ||y^{(n)} - y||_\infty = \sup_j |y_j^{(n)} - y_j| &= \sup_j \left| \sqrt{|x_j^{(n)}|} + \frac{1}{j+1} - \left(\sqrt{|x_j|} + \frac{1}{j+1} \right) \right| \\ &= \sup_j \left| \sqrt{|x_j^{(n)}|} - \sqrt{|x_j|} \right|. \end{aligned}$$

Or $t \mapsto \sqrt{t}$ est 1/2-holdérienne (de constante 1), c'est-à-dire $\forall x, y \geqslant 0$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant |x - y|^{1/2}$$

d'où,

$$\begin{aligned} ||f(x^{(n)}) - f(x)||_\infty &\leqslant \sup_j \left| |x_j^{(n)}| - |x_j| \right|^{1/2} \\ &\leqslant \sup_j \left| x_j^{(n)} - x_j \right|^{1/2} \\ &\leqslant \varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

Donc $f(x^{(n)}) \to f(x)$ pour $||\cdot||_\infty$, et donc $f\colon c_0 \to c_0$ est bien continue.
2) On ne peut pas utiliser Cauchy-Lipschitz car f n'est pas localement lipschitzienne, et on ne peut pas utiliser non plus Cauchy-Peano-Arzelà car on est en dimension infinie.
3) Supposons que $x \in C(]-a, a[, c_0)$ soit une solution du problème de Cauchy considéré. On a alors $x' = f(x)$, donc pour tout n,

$$x_n'(t) = \sqrt{|x_n(t)|} + \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc $t \mapsto x_n(t)$ est strictement croissante, et comme $x_n(0) = 0$, on a que pour tout $t \in]0, a[$, $x_n(t) > 0$. On peut donc diviser par $\sqrt{x_n(t)} = \sqrt{|x_n(t)|}$, d'où

$$\frac{x_n'(t)}{\sqrt{x_n(t)}} = 1 + \frac{1}{(n+1)\sqrt{x_n(t)}} > 1.$$

4) On applique le théorème des accroissement finis (sur $\mathbb{R}$!) à $t \mapsto \sqrt{x_n(t)}$, qui est continue sur $[0, a[$, dérivable sur $]0, a[$, donc pour tout $t \in]0, a[$, il existe $c \in]0, a[$ tel que

$$\sqrt{x_n(t)} - \sqrt{x_n(0)} = \frac{x_n'(c)}{2\sqrt{x_n(c)}} t,$$

et donc, comme $x_n(0) = 0$, on a

$$\sqrt{x_n(t)} = \frac{x_n'(c)}{2\sqrt{x_n(c)}} t > \frac{t}{2},$$

par la question précédente. Par conséquent, $x_n(t) \geqslant t^2/4$, pour tout $t \in [0, a[$.

5) Quand $t > 0$, on a donc que $x_n(t)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, c'est-à-dire $x(t) = (x_n(t))_n \notin c_0$. Donc le problème de Cauchy n'admet pas de solution.