31 mars 2009

PRÉSENTATION ET PROGRAMME DE MES RECHERCHES

F. DELOUP

Mes travaux mathématiques font partie de la topologie en petites dimensions. Ils s'articulent pour l'essentiel autour de deux notions duales, conçues il y a à peu près un siècle et formalisées algébriquement dans la première moitié du 20^{eme} siècle : les intersections et les enlacements.

Le projet de recherches ci-dessous en touche plusieurs aspects : topologiques, algébriques et combinatoires. Il reprend en partie les perspectives déjà esquissées dans ma thèse d'habilitation à diriger des recherches [14] et en partie rédigées dans le travail en cours [2]. Les perspectives les plus spéculatives que je considère néanmoins comme tout-à-fait sérieuses sont les classifications combinatoires d'enlacements (§1) qui fait intervenir combinatoire et théorie des représentations, et les applications aux cobordismes (§4), avec des questions de nature arithmétique.

1. Classifications combinatoires d'enlacements

Un enlacement est une forme bilinéaire symétrique sur un groupe abélien fini. L'ensemble $\mathfrak{M}$ des enlacements forme un monoïde pour la somme orthogonale $\oplus$; c'est l'objet central de notre article [8]. A part l'article de Kawauchi et Kojima dans les années 80, il n'a pas reçu d'attention particulière, peut-être du fait de la complexité de sa présentation en termes de générateurs et relations. Il contient pourtant toute la combinatoire des tableaux de Young (et en fait bien davantage), comme nous avons essayer de l'expliquer brièvement.

Dans notre article [8], nous présentons $\mathfrak{M}$ comme un sous-monoïde de tableaux admissibles – vérifiant des propriétés combinatoires explicites. Si l'on se restreint aux p-groupes d'ordre fixé, un tableau admissible généralise une partition d'un entier fixé.

On peut toujours définir l'application "oubli" qui à un tableau admissible associe sa partition. On peut aussi définir une autre application oubli – qui se factorise à travers la précédente – en associant à un tableau admissible T son « profil de rangs », c'est-à-dire l'ensemble des entiers k tels que $r_k(T) \neq 0$ (c'est la partition précédente dans laquelle on oublie les multiplicités des parts). Il est raisonnable d'espérer classifier le monoïde $\mathfrak{M}$ à partir des fibres génériques de l'une ou l'autre de ces applications.

Maintenant, il est bien connu que l'ensemble Λ_n des partitions (ordonnées) d'un entier n est en correspondance bijective avec l'ensemble des classes de conjugaison du groupe symétrique S_n qui sont elles-mêmes en correspondance bijective avec les représentations irréductibles de S_n. Soit $\mathfrak{T}_n^{\text{adm}}$ l'ensemble des tableaux admissibles dont l'ordre est fixé. Cet objet s'interprète-t-il comme l'ensemble des représentations d'un groupe généralisant le groupe symétrique ? Les représentations irréductibles s'identifieraient alors aux tableaux admissibles. Dans notre thèse d'habilitation à diriger des recherches [14], nous avons soulevé la question de généraliser la combinatoire des tableaux de Young aux tableaux admissibles.

Depuis, j'ai trouvé la réponse dans le cas des p-enlacements (enlacements sur les p-groupes) avec p impair : l'objet combinatoire remplaçant les partitions s'identifie aux "surpartitions". Une surpartition d'un entier n est une partition dont la dernière occurence d'une part peut être (ou non) distinguée. Par exemple, $(5, 5, 2, \overline{2}, 1, \overline{1})$ est une surpartition de 16. Le rôle du groupe symétrique est joué par (les éléments nilpotents de) l'algèbre de Lie sp(n).

En revanche, la question dans le cas $p = 2$ est ouverte. Le monoïde des p-enlacements pour tout p impair se plonge dans le monoïde des 2-enlacements, donc en un sens la question essentielle est le cas $p = 2$. Nous avons écrit un programme qui calcule le nombre de classes d'isomorphismes de 2-enlacements d'ordre fixé (ainsi qu'avec d'autres propriétés), qui est disponible sur le site

http ://www.research.att.com/˜njas/sequences/A122555

2. Tqfts et Généralisations

Une théorie topologique quantique des champs est un invariant de cobordismes qui associe un opérateur linéaire à un cobordisme et qui satisfait à certaines propriétés typiques de fonctorialité. Nous avons construit [4] une théorie topologique quantique des champs en dimension 3 à partir d'un enlacement. Un avantage essentiel de notre théorie est son caractère explicite mis en évidence grâce à une formule de réciprocité, de sorte que nous pouvons la généraliser en dimensions supérieures.

On peut proposer une généralisation non abélienne de cette théorie. On remplace le groupe abélien G de la théorie par un groupe non abélien G. La question centrale est alors de généraliser l'enlacement. Dans les travaux d'Ospel, il est essentiellement remplacé par un 3-cocycle « quasi-abélien » sur G. Ce 3-cocycle s'interprète (Street, Turaev) dans le cadre d'une généralisation des catégories monoïdales tressées, autorisant les isomorphismes d'associativité. M. Sokolov a proposé une interprétation en calcul d'écheveau (skein calculus) de l'invariant τ, qui admet elle aussi une généralisation naturelle.

Un autre type de généralisation consiste à considérer des revêtements de variétés et d'y étudier les raffinements de l'enlacement. L'idée est de prendre en compte une action de groupe π. Une partie de nos résultats présentés dans [14] semble se généraliser effectivement (notamment la construction de l'invariant τ et d'invariants de type fini).

3. Structures spin complexes

Le théorème de plongement dans notre article [12] affirme que toute structure spin complexe σ sur une 3-variété M compacte orientée s'interprète comme un raffinement quadratique φ_σ de l'enlacement λ_M : Tors $H_1(M) \times$ Tors $H_1(M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Ce théorème est à la base de la construction de la théorie des invariants de type fini de 3-variétés munies de structures spin complexes.

Supposons à présent $b_1(M) \geq 1$. Soit Quad(λ_M) l'ensemble des raffinements quadratiques dont l'enlacement est λ_M. Si l'on munit Quad(λ_M) de la topologie naturelle, modelée sur celle de $H^1(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^* = \mathrm{Hom}(H^1(M;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, alors l'image de $\sigma \mapsto \varphi_\sigma$ est *dense* dans Quad(λ_M). L'invariant $\tau(M,\sigma)$, ou plus généralement les invariants de type fini que nous avons construits dans [7] [11] [12], s'interprètent donc comme étant associés à un raffinement dans l'image de φ. Il est raisonnable de les généraliser à un raffinement quadratique *quelconque* de λ_M. Cela suggère d'introduire une notion raisonnable de limite d'invariants de type fini.

4. Application aux 4-cobordismes

Il s'agit de décrire les intersections positives de 4-variétés lisses bordées par des 3-sphères d'homologie rationnelle. Le point de départ est une interprétation topologique simple d'une observation algébrique :

Théorème 1. *Soit X une 3-sphère d'homologie rationnelle et soit f une présentation sur réseau de son enlacement. Alors il existe une 4-variété lisse simplement* *connexe Y telle que $\partial Y = X$ et dont la forme d'intersection est $f \oplus g$ où g est unimodulaire.*

Un résultat profond de Ozsváth-Szabó affirme que l'invariant de Gauss $\gamma(\sigma)$ associé à une structure spin^c σ d'une 3-sphère d'homologie rationnelle admet une *extension rationnelle* :

Théorème 2. *Soit M une 3-sphère d'homologie rationnelle et $\sigma \in \mathrm{Spin}^c(M)$. Il existe un invariant $d_\sigma \in \mathbb{Q}$ de Spin^c 3-cobordisme de (M, σ) tel que*

$$d_\sigma = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}(\gamma(\sigma)) \bmod \mathbb{Z}.$$

De plus, si X est une 4-variété lisse simplement connexe définie positive munie d'une structure spin^c θ telle que $\theta|_M = \sigma$, alors

$$d_\sigma \leq \frac{c_1(\theta)^2 - \mathrm{rg}(H^2(X))}{4},$$

où $c_1(\theta)$ est la classe de Chern associée à θ.

On utilise ici une normalisation différente de la normalisation originale.

En l'associant au théorème 1 et à ses raffinements, ce résultat permet d'obtenir des obstructions sur la forme d'intersection d'une 4-variété lisse simplement connexe bordée par une 3-sphère d'homologie dont l'enlacement est fixé. De façon un peu plus précise, nous pouvons énoncer la conjecture suivante.

Conjecture. Soit X une 4-variété lisse simplement connexe compacte de bord M une 3-sphère d'homologie rationnelle. Notons i_M l'intersection algébrique sur $H_2(M)$ et λ_M l'enlacement sur Tors $H_1(M)$. Il existe un nombre fini de rationnels $r_1 < \ldots < r_n$ et de classes d'isomorphismes $f_1, \ldots, f_n$ d'intersections algébriques au-dessus de λ_M (au sens du discriminant, c'est-à-dire que $\lambda_M = L_{f_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$) tels que

1. $\min_\sigma d_\sigma \leq r_n$ avec égalité si et seulement si i_M est isomorphe à f_n ;
2. De plus, si $r_j < \min_\sigma d_\sigma < r_{j+1}$ $(1 \leq j \leq n-1)$, alors il existe un nombre fini de classes d'isomorphisme pour i_M ;
3. Si $\min_\sigma d_\sigma = r_j$ $(1 \leq j \leq n-1)$, alors i_M est isomorphe à f_j.

Le minimum ci-dessus est pris sur toutes les structures spin complexe.

La conjecture ci-dessus peut sembler a priori contraire à l'intuition, dans la mesure où l'on ne s'attend pas normalement à ce qu'il existe des formes d'intersection privilégiées au-dessus d'une forme d'enlacement fixée. Mais l'invariant d_σ encrypte des restrictions très fortes et vérifie l'inégalité du théorème ci-dessus, faisant intervenir rang et classe caractéristique.

Cette conjecture généraliserait le théorème de Donaldson qui affirme qu'une 4-variété lisse compacte sans bord a ou bien une forme d'intersection non définie ou bien une forme d'intersection définie diagonalisable. (Il correspond au cas où $n = 1$ et $r_1 = 0$ ci-dessus.)

Cette conjecture soulève des problèmes arithmétiques : il s'agit de relever certaines obstructions sur l'enlacement au niveau de l'intersection. La théorie de Nikulin (discriminant) est insuffisante pour décrire la fibre d'un enlacement. Il s'agit ici de décrire explicitement les intersections avec inégalité prescrite sur les classes caractéristiques. Dans le cas d'une intersection unimodulaire (c'est-à-dire correspondant au cas d'une 4-variété lisse orientée dont le bord est une sphère d'homologie entière), N. Elkies a montré que la série theta associée à la forme unimodulaire définie positive diagonale détermine cette forme. Ainsi si le cas d'égalité dans l'inégalité d'adjonction survient, alors la forme d'intersection est isomorphe à la forme diagonale. Ceci redémontre le théorème de Donaldson (il suffit d'enlever une boule d'une 4-variété lisse fermée orientée). Cela correspond à la conjecture ci-dessus dans le cas $n = 1$ (et $r = r_1 = 0$).

La question se pose alors de généraliser le résultat d'Elkies à d'autres formes définies positives (non unimodulaires). On sait qu'en général, la série theta classique associée à une forme définie positive ne la détermine pas.

Mentionnons deux approches. Une première approche possible consiste à utiliser des séries thera généralisées, les séries theta de Siegel. Ces séries theta apparaissent dans un contexte différent : quand j'ai explicité la théorie conforme des champs associée à la théorie topologique quantique des champs abélienne associée à un enlacement [4], j'ai trouvé essentiellement la représentation de Weil associée à une forme quadratique sur un groupe abélien fini. Cette forme quadratique s'exprime comme un produit tensoriel, de sorte que la représentation de Weil est responsable de l'apparition des séries theta de Siegel. Sur le plan algébrique, elles déterminent la classe d'isomorphisme de la forme d'intersection définie positive, si l'enlacement est fixé. Il doit exister une généralisation de la méthode d'Elkies à ce contexte plus général. En effet, elle est ultimement basée sur le principe du maximum qui se généralise au contexte des séries theta de Siegel.

La seconde approche est développer une théorie similaire à celle de Nikulin, c'est-à-dire d'essayer de réduire le cas non-unimodulaire au cas modulaire (et d'utiliser le résultat d'Elkies). Une forme définie positive stabilisée suffisamment (il suffit de quatre fois) se plonge toujours dans une forme définie positive unimodulaire (de même rang). Le problème devient alors de savoir quand la forme unimodulaire en question peut être la forme triviale (diagonale).

On peut également rechercher d'autres conditions sur le bord. Le problème le plus proche de la conjecture ci-dessus est celui de caractériser les formes d'intersection si le bord a une structure de contact.

Références

[1] Bonfante, G., Deloup, F. : About the derivation height of rewrite systems with interpretations over the reals, preprint.

[2] Deloup, F. : Intersections and linkings in low-dimensional topology, en préparation (120 pages).

[3] Deloup, F. : Linking forms, reciprocity for Gauss sums and invariants of 3-manifolds, doctorat de 3ème cycle, Strasbourg I, 1997.

[4] Deloup, F. : An explicit construction of an abelian topological quantum field theory in dimension 3. Proceedings of the Pacific Institute for the Mathematical Sciences Workshop "Invariants of Three-Manifolds" (Calgary, AB, 1999). Topology Appl. 127 (2003), no. 1-2, 199–211.

[5] Deloup, F. : On spin and complex spin Borromean surgeries, Advances in topological quantum field theory, 127–133, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 179, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.

[6] Deloup, F. : Linking forms, reciprocity for Gauss sums and invariants of 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), no. 5, 1895–1918.

[7] Deloup, F. : On abelian quantum invariants of links in 3-manifolds, Math. Ann. 319, No. 4 (2001), 759 - 795.

[8] Deloup, F. : Monoïde des enlacements et facteurs orthogonaux, Algebr. Geom. Topol. 5 (2005), 419–442.

[9] Deloup, F., Gille, C. : Abelian quantum invariants indeed classify linking pairings, J. Knot Theory & Ramifications 10 no. 2 (2001), 295–302.

[10] Deloup ,F., Massuyeau, G. : Quadratic functions on torsion groups, J. Pure Applied Alg. 198 (2005), 105–121.

[11] Deloup, F., Massuyeau, G. : Reidemeister-Turaev torsion modulo one of rational homology three-spheres. Geom. Topol. 7 (2003), 773–787

[12] Deloup, F., Massuyeau, G. : Quadratic functions and complex spin structures on three-manifolds, Topology 44 (2005), 509–555.

[13] Deloup, F., Turaev, V. : On Reciprocity, J. Pure Applied Algebra, 208 (2007), no. 1, 153–158..

[14] Deloup, F. : Autour des Enlacements, Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 2006.