

ENLACEMENTS EN PETITES DIMENSIONS

FLORIAN DELOUP

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|----|
| 1. Introduction | 1 |
| 2. Le discriminant | 4 |
| 2.1. Le théorème de plongement | 4 |
| 2.2. Le théorème de classification stable | 5 |
| 3. Combinatoire des enlacements | 6 |
| 3.1. Le monoïde des enlacements | 6 |
| 3.2. La classification des enlacements pointés | 10 |
| 3.3. La formule de réciprocity | 11 |
| 4. Théorie topologique quantique des champs abélienne | 12 |
| 4.1. Invariant associé à l'enlacement | 13 |
| 4.2. L'extension aux cobordismes | 15 |
| 5. La théorie complexe spin des invariants de type fini | 18 |
| 5.1. Le plongement des structures spin complexes en dimension 3 | 20 |
| 5.2. Applications à la torsion de Reidemeister–Turaev | 21 |
| 6. Perspectives | 22 |
| 6.1. Classifications combinatoires | 22 |
| 6.2. Généralisations | 22 |
| 6.3. Structures spin complexes | 23 |
| 6.4. Application aux 4-cobordismes | 23 |
| Références | 23 |

1. INTRODUCTION

L'objet de ce texte est de présenter une partie des travaux de l'auteur, centrée sur les enlacements et les invariants de 3-variétés. Étant donné un anneau commutatif R , un enlacement algébrique est une forme bilinéaire symétrique ou alternée $M \times M \rightarrow$

$F(R)/R$ où M est un R -modules de torsion et $F(R)$ le corps des fractions de R . Une forme d'intersection algébrique est une forme bilinéaire symétrique ou alternée $M \times M \rightarrow R$ où M est un R -module projectif. Du point de vue topologique, dans le cas le plus simple, ces formes apparaissent naturellement comme sous-produits de la dualité de Poincaré à coefficients entiers. Ainsi toute variété orientée X de dimension paire $2n$ admet une forme d'intersection, donné par le produit cohomologique \cup évalué sur la classe fondamentale :

$$H^n(X) \times H^n(X) \rightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \mapsto (a \cup b)([X]).$$

La symétrie ou l'anti-symétrie du produit \cup , qui est donnée par la parité de n , induit celle de la forme d'intersection. Une variété orientée de dimension impaire $2n + 1$ possède quant à elle un enlacement sur le groupe de torsion $\text{Tors } H^n(X)$ via le produit

$$H^n(X) \times H^{n+1}(X; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^{2n+1}(X; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Dans ce cas, l'enlacement est symétrique si n est impair, alterné si n est pair. La dualité de Poincaré sur les variétés compactes orientées sans bord assure que dans ce cadre, ces formes sont non-dégénérées.

Dans la théorie classique, ces formes conduisent à des invariants de cobordismes via les groupes de Witt qui leur sont associés : par exemple, la signature (pour $\dim X = 0 \pmod{4}$), la signature mod 8 (pour $\dim X = -1 \pmod{4}$), invariant de De Rham (pour $\dim X = 1 \pmod{4}$). Une partie du présent travail s'interprète comme une généralisation de ces invariants dans le cas $\dim X = -1 \pmod{4}$.

Une fonction quadratique est une application q sur un module telle que $b_q : (x, y) \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ soit bilinéaire. La forme bilinéaire b_q est dite associée à q . Étant donné une forme bilinéaire b et une fonction quadratique q , on dira que q est un raffinement quadratique de b si $b_q = b$. Une forme d'intersection peut admettre zéro, un ou plusieurs raffinements quadratiques. Un enlacement admet en général plusieurs raffinements quadratiques.

Les formes d'intersection et les enlacements admettent, moyennant le choix d'une trivialisations stable du fibré tangent de la variété, un unique raffinement quadratique. Un exemple (qui est utilisé implicitement dans §5 dans le cadre des surfaces) se présente quand $\dim X = 2 \pmod{4}$: le raffinement de la forme d'intersection est métabolique et l'invariant d'Arf associé donne un invariant de la classe de cobordisme trivialisé de la variété munie de la trivialisations (Kervaire, 1960). Dans le cas où $\dim X = -1 \pmod{4}$, le raffinement quadratique de l'enlacement est défini sur $\text{Tors } H^n(X)$ et est à valeurs dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Il ne donne plus un invariant de cobordisme trivialisé, mais un invariant de cobordisme spin.

Nos travaux s'organisent autour de la notion de raffinement quadratique d'enlacement. Une observation essentielle est que tout raffinement quadratique q sur M obtenu à partir d'une trivialisations est homogène, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété $q(nx) = n^2q(x)$, pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in M$. Les raffinements quadratiques qui apparaissent dans nos travaux ne seront pas toujours déterminés par une trivialisations et seront donc éventuellement non-homogènes. Ils seront aussi éventuellement dégénérés. Une autre différence importante avec le point de vue traditionnel est que nous utilisons généralement la classe d'isomorphisme des raffinements quadratiques

(ou des enlacements), et non simplement leur classe de Witt associée. Ce choix est en fait dicté par les constructions topologiques des parties §4 et §5.

La **première partie** pose un cadre combinatoire (la construction du discriminant) qui mime algébriquement la relation entre les invariants d'une variété de dimension $4n$ et ceux de son bord. Nous décrivons, à l'aide d'un théorème de plongement, les raffinements quadratiques en termes d'un quotient de formes caractéristiques d'un réseau. Le second résultat classe à isomorphisme près les raffinements quadratiques provenant de la construction du discriminant. Cette question est liée à la classification stable des formes d'intersection sur les réseaux munies de formes caractéristiques. Pour lever l'indétermination du raffinement quadratique par rapport à son enlacement associé, nous réduisons la classification des raffinements quadratiques à celle d'une classe particulière d'enlacements pointés, c'est-à-dire d'enlacements munis d'éléments distingués. Ces résultats généralisent des résultats classiques de Wall, Nikulin, Durfee et Looijenga–Wahl. Enfin, nous résolvons la question du comportement de la construction du discriminant relativement au produit tensoriel de deux réseaux dans le cadre du groupe de Witt des raffinements quadratiques d'enlacements. En conséquence, en appliquant l'homomorphisme fourni par la somme de Gauss, nous obtenons une formule de réciprocity. Cette formule de réciprocity s'avère très utile dans nos travaux, par exemple, elle permet d'expliquer le lien entre les données combinatoires de la théorie topologique quantique des champs de §4 et les données topologiques. Elle s'applique au calcul de la plupart des invariants quantiques (voir par exemple [18], [17]).

La classification des enlacements sur les groupes abéliens finis à partir d'invariants a été résolue sur les p -groupes avec p impair par Wall dans les années 60 et sur les 2-groupes (le cas le plus difficile) en 1980 par Kawauchi et Kojima. Dans la **deuxième partie**, nous proposons une nouvelle solution plus explicite à ce problème, qui consiste à décrire de façon combinatoire l'image d'un système complet d'invariants. En application, nous résolvons le problème de détecter un facteur orthogonal d'un enlacement donné. Des exemples d'applications topologiques sont l'existence d'applications de degré un sur un lenticulaire, y compris avec des raffinements spin et spin complexe.

La **troisième partie** considère les enlacements pointés sur les groupes abéliens finis. Le résultat principal est que les enlacements pointés sont classifiés par des sommes de Gauss généralisées. Il répond à une question soulevée par C. Gille. Le point le plus délicat est la classification sur les 2-groupes.

Dans la **quatrième partie**, nous exposons la construction d'une théorie topologique quantique des champs en dimension 3 à partir d'un enlacement. Cette théorie est « abélienne », ce qui permet de l'expliquer complètement en termes d'invariants topologiques classiques. Les travaux liés à cette théorie ont motivé dans une large mesure l'introduction des outils algébriques décrits dans les parties précédentes. Une conséquence de nos formules explicites est que la théorie obtenue se généralise aux dimensions supérieures (pourvu que la dimension soit congrue à -1 modulo 4).

La **cinquième partie** présente la construction d'une théorie dite à la Goussarov–Habiro des invariants de type fini pour les structures complexes spin de 3-variétés. Les résultats obtenus semblent spécifiques à la dimension 3. Un des résultats clés est le fait que l'ensemble des structures spin complexes sur une 3-variété X orientée

compacte (qui possède une structure affine sur $H^2(M)$) se plonge de façon naturelle dans l'ensemble des raffinements quadratiques de l'enlacement sur M . On montre que le raffinement quadratique coïncide avec celui déterminé par la torsion de Reidemeister–Turaev.

La dernière partie présente quelques perspectives actuelles de nos travaux.

2. LE DISCRIMINANT

Un *réseau* est un groupe abélien de type fini muni d'une forme bilinéaire symétrique $f : M \times M \rightarrow \mathbb{Z}$ sur un réseau. Un adjoint d'une forme bilinéaire symétrique sera toujours noté par $\widehat{\cdot}$. Ainsi \widehat{f} désigne l'application adjointe $M \rightarrow M^* = \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$. Un réseau donne lieu, par extension des scalaires, à une forme bilinéaire $f_{\mathbb{Q}} : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$ où $V = M \otimes \mathbb{Q}$. Le réseau *dual* est $M^{\sharp} = \{x \in V \mid f_{\mathbb{Q}}(x, M) \subset \mathbb{Z}\}$. Un réseau est *unimodulaire* si $M^{\sharp} = M$.

Une *forme caractéristique* pour un réseau est un élément $c \in M^*$ tel que

$$f(x, x) - c(x) \in 2\mathbb{Z}, \quad \text{pour tout } x \in M.$$

L'ensemble $\text{Char}(f)$ des formes caractéristiques d'un réseau est non vide et est un espace affine sur $\text{Hom}(M, 2\mathbb{Z})$.

Étant donné un réseau comme ci-dessus, $G_f = M^{\sharp}/M$ est un groupe de torsion. On définit dessus l'enlacement $L_f : G_f \times G_f \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par

$$L_f([x], [y]) = f_{\mathbb{Q}}(x, y) \bmod \mathbb{Z}, \quad x, y \in M^{\sharp}.$$

Si le réseau est muni d'une forme caractéristique c , cet enlacement admet un raffinement quadratique $\phi_{f,c}$. Soit $c_{\mathbb{Q}} : V \rightarrow \mathbb{Q}$ l'extension linéaire de c . On définit alors

$$\phi_{f,c}([x]) = \frac{1}{2}(f_{\mathbb{Q}}(x, x) - c_{\mathbb{Q}}(x)) \bmod \mathbb{Z}, \quad x \in M^{\sharp}.$$

Observons que le défaut d'homogénéité, défini par $d : x \mapsto q(x) - q(-x)$, est donné par

$$d(x) = c_{\mathbb{Q}}(x) \bmod \mathbb{Z}.$$

Remarque. Le signe $-$ dans la formule ci-dessus se justifie par une convention usuelle d'orientation en topologie. Voir la remarque après le théorème 1.

Wall a montré que l'application $[f] \mapsto [L_f]$ est surjective sur le monoïde des (classes d'isomorphismes d') enlacements sur les groupes abéliens finis. Nous allons voir en quoi l'énoncé analogue en remplaçant enlacement par raffinement quadratique tombe en défaut.

2.1. Le théorème de plongement. Soit $\text{Quad}(L_f)$ l'ensemble des raffinements quadratiques de l'enlacement L_f . C'est un espace affine modelé sur $\text{Hom}(G_f, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

On dispose d'une application bilinéaire naturelle $M^* \times M^{\sharp} \rightarrow \mathbb{Q}$ définie par $(\alpha, x) \mapsto \alpha_{\mathbb{Q}}(x)$, où $\alpha_{\mathbb{Q}}$ désigne l'extension de α en tensorisant par \mathbb{Q} . Cette application induit une application bilinéaire

$$\langle -, - \rangle : \text{Coker } \widehat{f} \times G_f \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

dont on peut montrer qu'elle est toujours non-dégénérée à gauche et à droite, et même toujours non-singulière à droite. Notons $\Phi_f : \text{Coker} \widehat{f} \rightarrow \text{Hom}(G_f, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ l'adjoint à gauche.

On montre que l'homomorphisme $\text{Ker} \widehat{f} \rightarrow \mathbb{Z}$ induit par produit tensoriel avec \mathbb{Q}/\mathbb{Z} un homomorphisme $\text{Ker} \widehat{L}_f \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Soit $j_f : \text{Hom}(\text{Ker} \widehat{f}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(\text{Ker} \widehat{L}_f, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ le morphisme correspondant.

Théorème 1 (Deloup–Massuyeau, [12]). *L'application $c \mapsto \phi_{f,c}$ induit un plongement affine*

$$\phi_f : \text{Char}(f)/2\widehat{f} \hookrightarrow \text{Quad}(L_f)$$

au-dessus du morphisme de groupe $\Phi_f : \text{Coker} \widehat{f} \rightarrow \text{Hom}(G_f, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$; de plus,

$$\text{Coker} \phi_f = \text{Coker} j_f$$

et étant donné $q \in \text{Quad}(L_f)$, $q \in \text{Im} \phi_f$ si et seulement si $q|_{\text{Ker} \widehat{L}_f} \in \text{Im} j_f$.

En particulier, l'application ϕ_f est surjective si et seulement si f est non-dégénérée. Cette construction apparaît en topologie quand le réseau s'identifie au groupe libre $H_{2n}(X)/\text{Tors } H_{2n}(X)$ d'une $4n$ -variété orientée compacte munie de sa forme d'intersection. Supposons par exemple que X soit munie d'une structure presque complexe; La forme caractéristique peut s'interpréter comme la donnée d'une classe $c_1(X)$ de Chern. Dans ce cas, l'enlacement produit par la construction du discriminant s'identifie comme suit : soit I l'image de l'application naturelle $\text{Tors } H_{2n}(X, \partial X) \rightarrow \text{Tors } H_{2n-1}(\partial X)$. Alors L_f est l'opposé de l'enlacement de ∂X (avec la convention usuelle d'orientation) défini sur I^\perp/I (qui est un sous-quotient de $\text{Tors } H_{2n-1}(\partial X)$) et $\phi_{f,c}$ est un raffinement de cet enlacement. Dans le cas plus spécifique où ∂X est de dimension 3, $\text{Char}(f)/2\widehat{f}(M)$ s'identifie avec l'espace affine des structures spin complexes sur ∂X . Voir à ce sujet §5.1.

Le théorème 1 a été généralisé dans un travail en cours par l'auteur à des enlacements sur des R -modules de torsion autres que $R = \mathbb{Z}$. Essentiellement une telle généralisation existe dès qu'on peut définir une notion raisonnable de forme caractéristique.

2.2. Le théorème de classification stable. Le résultat que nous présentons ici généralise un résultat dû à Wall et Durfee, ainsi qu'à Looijenga–Wahl. L'idée consiste à utiliser la construction du discriminant pour résoudre le problème de classer les enlacements, et plus généralement les raffinements quadratiques, à isomorphisme près.

Il existe deux notions naturelles d'équivalences sur les réseaux munis de formes caractéristiques. Deux réseaux (M, f, c) et (M', f', c') munis de formes caractéristiques sont *équivalents* s'il existe un isomorphisme $\psi : M \rightarrow M'$ tel que $\psi^* f' = f$ et $\psi^* c' = c \bmod 2\widehat{f}(M)$. Deux tels réseaux sont dits *stablement équivalents* s'ils deviennent équivalents après stabilisations avec des réseaux unimodulaires munies de formes caractéristiques. Les réseaux unimodulaires induisent des enlacements triviaux par la construction du discriminant; aussi une équivalence stable entre réseaux induit-elle un isomorphisme entre les raffinements quadratiques correspondants. Qu'en est-il de la réciproque? L'adaptation du résultat de Wall pour les

enlacements permet de répondre positivement dans le cas où les réseaux sont non-dégénérés. L'inclusion du cas où les réseaux sont potentiellement dégénérés est motivé par l'étude des invariants de type fini des structures spin complexes sur les 3-variétés, voir §5.

Rappelons que l'adjoint à droite de l'application bilinéaire $\langle -, - \rangle : \text{Coker } \widehat{f} \times G_f \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est toujours un isomorphisme $G_f \rightarrow \text{Hom}(\text{Coker } \widehat{f}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Par conséquent, tout isomorphisme $\psi : \text{Coker } \widehat{f} \rightarrow \text{Coker } \widehat{f}'$ induit un isomorphisme $\psi^\sharp : G_{f'} \rightarrow G_f$. Ceci donne lieu à une application injective

$$\psi \mapsto \psi^\sharp, \quad \text{Iso}(\text{Coker } \widehat{f}, \text{Coker } \widehat{f}') \rightarrow \text{Iso}(G_{f'}, G_f).$$

Théorème 2 (Deloup–Massuyeau, [12]). *Deux réseaux (M, f, c) et (M', f', c') munis de formes caractéristiques sont stablement équivalentes si et seulement s'il existe un élément ψ^\sharp tel que les raffinements quadratiques $(G_f, \phi_{f,c})$ et $(G_{f'}, \phi_{f',c'})$ soient isomorphes via ψ^\sharp . De plus, un tel isomorphisme se relève en une équivalence stable entre (M, f, c) et (M', f', c') .*

Dans le cas où les réseaux sont non-dégénérés, l'application $\psi \mapsto \psi^\sharp$ est bijective, donc l'existence de ψ^\sharp équivaut à celle de ψ (qui se relève toujours), de sorte que l'équivalence stable sur les réseaux est équivalente à l'isomorphisme des raffinements quadratiques correspondants.

On note ± 1 les deux formes sur \mathbb{Z} définie par $(1, 1) \mapsto \pm 1$, munies toutes deux de la forme caractéristique $1 \mapsto 1$.

Corollaire 2.1. *Soient (M, f, c) et (M', f', c') deux réseaux munis de formes caractéristiques. Nous avons $(G_f, \varphi_{f,c}) \simeq (G_{f'}, \varphi_{f',c'})$ si et seulement si les réseaux deviennent équivalents par stabilisation avec des formes comme ci-dessus.*

Remarque. Ce résultat est bien connu pour les réseaux sans formes caractéristiques.

3. COMBINATOIRE DES ENLACEMENTS

Les enlacements considérés dans cette section sont tous sur des groupes abéliens finis. Certains résultats de cette section admettent des généralisations aux modules de torsion de type fini sur des domaines de Dedekind [4].

3.1. Le monoïde des enlacements. Comme indiqué dans l'introduction, la classification des enlacements a été considérée comme achevée avec la classification des enlacement sur les 2-groupes, par Kawauchi et Kojima en 1980. Ils construisent, par générateurs et relations, le monoïde \mathfrak{M} des classes d'isomorphismes (l'opération étant la somme orthogonale).

Nous proposons une construction différente du même objet. Outre le fait de simplifier les démonstrations, notre construction dévoile un objet combinatoire naturel et permet de répondre concrètement à la question de déterminer si un enlacement possède un facteur orthogonal donné.

L'idée de base est la suivante. Soit p un entier. Les p -groupes abéliens d'ordre p^n sont classés, à isomorphisme près, par un objet combinatoire qui est une partition (l_1, \dots, l_r) de n . Nous nous proposons de déterminer l'objet combinatoire qui va

classifier les enlacements sur les p -groupes d'ordre p^n . Dans le cas où p est impair, il suffit essentiellement de remplacer partition par partition signée. Dans le cas où $p = 2$, la combinatoire est plus compliquée.

Pour la décrire, on va décrire l'image d'un système d'invariants complets des enlacements sur les 2-groupes. Étant donné une fonction quadratique $q : G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, la somme de Gauss non normalisée associée est $\Gamma(q) = \sum_{x \in G} \exp(2\pi i q(x))$. Il sera en fait agréable par la suite de considérer la somme de Gauss normalisée

$$(1) \quad \gamma(q) = \begin{cases} \frac{\Gamma(q)}{|\Gamma(q)|} & \text{si } \Gamma(q) \neq 0; \\ 0 & \text{si } \Gamma(q) = 0. \end{cases}$$

Il est bien connu que si $\gamma(q) \neq 0$ alors $\gamma(q)$ est une racine 8-ème de l'unité. Soit maintenant $\lambda : G \times G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un enlacement. Posons alors $q_k(x) = 2^{k-1}\lambda(x, x)$ pour tout $k \geq 1$. On définit

$$(2) \quad \sigma_k(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \text{Arg } \gamma_k(q_k) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} & \text{if } \gamma_k(q_k) \neq 0 \\ \infty & \text{if } \gamma_k(q_k) = 0 \end{cases}$$

Soit $\overline{\mathbb{Z}}_8 = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Il s'agit du monoïde obtenu en adjoignant au groupe cyclique à 8 éléments un élément supplémentaire noté ∞ , avec la règle $\infty + a = a + \infty = \infty = \infty + \infty$ pour tout $a \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Il résulte de ce qui précède que σ définit une application $\mathbb{N}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_8$.

Par ailleurs, étant donné un 2-groupe G , on dispose des invariants de rang des sous-groupes homogènes. Si la partition associée à G est (l_1, \dots, l_r) , on définit, pour chaque $k \geq 1$,

$$(3) \quad \rho_k(\lambda) = |\{j \in \mathbb{N} \mid l_j = 2^k\}| \in \mathbb{N}.$$

Naturellement, cet invariant ne dépend que du groupe et non de l'enlacement défini dessus. On peut alors regrouper les invariants (rang, signature) ρ et σ sous la forme d'une seule application $(\rho, \sigma) : \mathbb{N}^\times \rightarrow \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$.

Soit \mathcal{M} un monoïde additif et I un suite d'entiers consécutifs. Un tableau est une application $I \rightarrow \mathcal{M}$, qu'il sera pratique de considérer comme un diagramme de la forme

| | | | | |
|---------------|-------|-----------|---------|-------|
| I | k | $k+1$ | \dots | l |
| \mathcal{M} | m_k | m_{k+1} | \dots | m_l |

Afin de simplifier la notation, les notations de l'intervalle ainsi que du monoïde seront omises des tableaux suivants. La longueur d'un tableau T est l'entier $1 + \sup_{(m,n) \in I \times I} |m - n| \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Un tableau T' est un prolongement d'un tableau T si T' prolonge T en tant qu'application. Dans ce cas, T est un tableau extrait de T' . Étant donné un tableau $T : I \rightarrow \mathcal{M}$ quelconque, on peut toujours le prolonger trivialement sur \mathbb{N} entier en définissant $\tilde{T}(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{N} - I$. En pratique, on confondra un tableau T et son prolongement trivial \tilde{T} à \mathbb{N} ainsi défini. Ainsi on dira qu'un tableau T est *fini* s'il est de longueur finie ou s'il est le prolongement trivial \tilde{T}' d'un tableau T' de longueur finie. (C'est la définition habituelle de support fini.) Comme \mathcal{M} est un monoïde, l'addition de tableaux est bien définie. La somme de deux tableaux T_1 et T_2 est définie sur \mathbb{N} par $T_1 + T_2 = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2$ où \tilde{T}_i , $i = 1, 2$, désigne le prolongement trivial à \mathbb{N} . L'ensemble des tableaux $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{M}$ forme un monoïde. L'élément neutre 0 est le tableau envoyant \mathbb{N} sur 0.

Le délimiteur à gauche (resp. à droite) d'un tableau $T : I \rightarrow \mathcal{M}$ est l'élément $-1 \leq \text{Inf } I - 1 < \infty$ (resp. l'élément $0 \leq \text{Sup } I + 1 \leq \infty$).

Considérons à présent les tableaux à valeur dans le monoïde $\mathcal{M} = \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$, que nous noterons $T : m \mapsto (r(m), s(m))$, avec $r(m) \in \mathbb{N}$ (rang formel) and $s(m) \in \overline{\mathbb{Z}}_8$ (signature formelle). Nous dirons qu'un tableau est *admissible* s'il existe un enlacement (G, λ) sur un 2-groupe tel que $r(m) = \rho_m(\lambda)$ et $s(m) = \sigma_m(\lambda)$ pour tout $m \in I$.

Un entier $m \in I$ sera dit *régulier* pour un tableau T si $r(m) = 0$ ou $s(m) \neq \infty$. On note $I_{\text{reg}} \subseteq I$ l'ensemble des éléments réguliers de T . Présentons quatre types particuliers distincts de tableaux :

- Type T_0 . Tout tableau de longueur impaire de la forme $T = (0, s(m))_{m \in I}$.

- Type T_1 . Tout tableau de la forme $\begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline 1 \\ \hline \infty \\ \hline \end{array}$ pour un entier non nul m .

- Type T_2 . Tout tableau de la forme $\begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline 2 \\ \hline \infty \\ \hline \end{array}$ pour un entier non nul m .

- Type T_3 . Tout tableau de longueur impaire tel que $I = I_{\text{reg}}$.

Le résultat principal est un critère nécessaire et suffisant pour qu'un tableau soit admissible.

Théorème 3 (Deloup, [10]). *Un tableau fini $T : \mathbb{N}^\times \rightarrow \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$, $m \mapsto (r(m), s(m))$ est admissible si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- (1) $r(I_{\text{reg}}) \subseteq 2\mathbb{N}$.
- (2) $s(m) = \sum_{k \geq m+1} r(k) \pmod{2}$ pour tout $m \in I_{\text{reg}}$.
- (3) $s(m) + s(m+1) = 2 \sum_{k \geq m+2} r(k) \pmod{4}$ pour tout $\{m, m+1\} \subseteq I_{\text{reg}}$.
- (4) Pour tout tableau T_{ext} extrait de T et pour toute paire de délimiteurs m, n de T_{ext} dans I_{reg} , les conditions suivantes sont vérifiées :

| Type de T_{ext} | T_0 | T_1 | T_2 | T_3 |
|--------------------------|-------|---------|------------|--------|
| $s(m) - s(n)$ | 0 | ± 1 | $0, \pm 2$ | $0, 4$ |

Compte-tenu du fait que le groupe d'un enlacement est fini, il est aisé d'observer sur le rang et la signature que tout tableau admissible est fini. Ceci garantit en particulier que les sommes intervenant dans les conditions (2) et (3) sont finies. (En particulier, la condition (2) implique que $s(m) \neq \infty$ dès que $r(m) = 0$: les entiers réguliers m de T sont exactement les entiers m tels que $s(m) \neq \infty$.) De manière générale, la nécessité des conditions énoncées dans le Théorème 3 est une conséquence de calculs d'enlacements et de sommes de Gauss. La preuve de la suffisance est constructive et se fait par récurrence sur la longueur de l'intervalle I , voir [10].

Notons \mathfrak{T} le monoïde constitué des tableaux $T : \mathbb{N}^\times \rightarrow \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$. On déduit du Théorème 3 que la somme de deux tableaux admissibles est encore un tableau admissible, de sorte que le sous-ensemble des tableaux admissibles constitue un sous-monoïde $\mathfrak{T}^{\text{adm}}$ de \mathfrak{T} . Puisque ρ, σ sont des invariants complets du monoïde \mathfrak{M}

des classes d'isomorphismes d'enlacements sur les 2-groupes, l'application $(\rho, \sigma) : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{T}$ est injective. Il en résulte la description combinatoire de \mathfrak{M} ci-dessous.

Corollaire 3.1. *Le monoïde \mathfrak{M} des classes d'isomorphismes d'enlacements sur les 2-groupes est isomorphe au sous-monoïde $\mathfrak{T}^{\text{adm}}$ des tableaux admissibles.*

Le théorème 3 se généralise aussi aux fonctions quadratiques homogènes, voir [10]. Il est raisonnable de conjecturer qu'il se généralise aussi aux fonctions quadratiques : l'idée est d'utiliser le théorème 4 afin de réduire cette question aux enlacements pointés (voir la section §3.2).

Considérons à présent la question de reconnaître si un enlacement λ' est un facteur orthogonal d'un enlacement λ , c'est-à-dire s'il existe un enlacement λ'' tel que

$$\lambda = \lambda' \oplus \lambda''.$$

Décrivons tout d'abord des conditions nécessaires simples pour qu'une telle décomposition orthogonale existe. Il est clairement nécessaire que

$$(4) \quad \rho_k(\lambda) \geq \rho_k(\lambda') \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Une seconde condition nécessaire, résultant de l'additivité de σ sur les sommes orthogonales, dit que

$$(5) \quad \sigma_k(\lambda') = \infty \implies \sigma_k(\lambda) = \infty, \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Supposons à présent ces conditions (4) et (5) vérifiées. Nous allons associer à (λ, λ') un ensemble

$$S_{\lambda, \lambda'} = \{T_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{Z}}_8}$$

de tableaux. Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{Z}}_8$, nous définissons le tableau $T_\alpha = (r_\alpha, s_\alpha) : \mathbb{N}^\times \rightarrow \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$ par

$$(6) \quad \begin{aligned} r_\alpha(k) &= \rho_k(\lambda) - \rho_k(\lambda') \\ s_\alpha(k) &= \begin{cases} \alpha & \text{if } \sigma_k(\lambda) = \infty \\ \sigma_k(\lambda) - \sigma_k(\lambda') & \text{if } \sigma_k(\lambda') \neq \infty. \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}^\times. \end{aligned}$$

Le tableau T_α est bien défini grâce à la condition (4) et au fait que ∞ est le seul élément non inversible dans $\overline{\mathbb{Z}}_8$.

Corollaire 3.2. *Un enlacement λ' est un facteur orthogonal d'un enlacement λ si et seulement si les conditions (4) et (5) ci-dessus sont vérifiées et s'il existe un tableau admissible $T \in S_{\lambda, \lambda'}$.*

Une première série d'applications est fournie par les applications de degré 1 sur les espaces lenticulaires $L(m, p)$ (ou plus généralement de degré n où est premier avec m), voir [10]. On peut également déterminer les lenticulaires proscrits ou prescrits en fonction de l'existence ou non d'une application de degré 1 à partir d'une variété de dimension trois donnée.

Une autre application concerne la torsion de Reidemeister, raffinée par Turaev. Elle est décrite dans §5.2.

3.2. La classification des enlacements pointés. Soit M un R -module de torsion. Un enlacement pointé est un enlacement muni $b : M \times M \rightarrow F/R$ d'un nombre fini éléments x_1, \dots, x_n . La notion d'isomorphisme entre enlacements s'étend immédiatement aux enlacements pointés : $(M, b, (x_1, \dots, x_n))$ et $(M', b', (x'_1, \dots, x'_n))$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $\psi : M \rightarrow M'$ tel que $\psi^*b' = b$ et $\psi(x_j) = x'_j$, $j = 1, \dots, n$. Il est parfois utile de relaxer la notion en remplaçant dans la définition $\psi^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)$ par $\psi(\{x_1, \dots, x_n\}) = \{x'_1, \dots, x'_n\}$.

Contrairement à la théorie des formes pointés (ou des isométries) sur les modules *libres*, dont l'outil essentiel est le théorème de Witt¹ [19], la classification des enlacements pointés est beaucoup plus délicate, même sur les modules de torsion de type fini les plus simples, à savoir les groupes abéliens finis.

Une motivation supplémentaire pour s'intéresser aux enlacements pointés est le fait que les classifications du paragraphe précédent ne mènent pas à une classification concrète en pratique. Or les fonctions quadratiques s'interprètent presque comme des enlacements pointés. On se restreint à présent aux enlacements sur les groupes abéliens finis.

Théorème 4 (Deloup–Massuyeau et Deloup, [12] [4]).

1. *Deux raffinements quadratiques q, q' d'enlacements b, b' respectivement, sont isomorphes si et seulement si $\gamma(q) = \gamma(q')$, s'il existe un isomorphisme ψ tel que $\psi^*b' = b$ et $\psi^*d_{q'} = d_q$.*
2. *Le monoïde des fonctions quadratiques se surjecte sur le monoïde des enlacements pointés de la forme (G, b, x) où G est un groupe abélien fini, b un enlacement sur G et $x \in 2G$.*

En d'autres termes, la classification des fonctions quadratiques se réduit à celle d'une classe particulière d'enlacements pointés, modulo l'invariant de Gauss (qui est un invariant de Witt). Remarquons qu'il s'agit ici de la classification des classes d'*isomorphisme* et non de la classification, au sens plus *faible*, des classes de Witt.

La première affirmation généralise un théorème dû à Nikulin qui correspond au cas particulier $d_q = d_{q'} = 0$ (raffinements quadratiques homogènes). La démonstration est très différente de celle de Nikulin. Nikulin démontre le résultat par récurrence sur le nombre de générateurs, en utilisant la classification des enlacements sur l'anneau p -adique \mathbb{Z}_p . Nous démontrons le résultat directement en utilisant l'action de $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ sur l'invariant de Gauss $\gamma(q)$.

La formule suivante due à van der Blij et à Milgram calcule la somme de Gauss $\gamma(G_f, \varphi_{f,v})$ via la signature $\sigma(f) \in \mathbb{Z}$.

Lemme 1 (Van der Blij, [3]). $\gamma(G_f, \varphi_{f,v}) = e^{\frac{\pi i}{4}(\sigma(f) - f_{\mathbb{Q}}(v,v))}$.

Pour décrire la classification des enlacements pointés sur les groupes abéliens finis, on introduit des sommes de Gauss généralisées. On se donne un triplet

$$(V, f, s)$$

¹Le théorème de Witt affirme que toute isométrie entre deux sous-espaces V et W d'un k -espace vectoriel quadratique U s'étend en une isométrie de (U, q) . En particulier, deux sous-espaces V, W sont donc isométriques si et seulement si $q|_V$ et $q|_W$ sont isomorphes.

où $f : V \rightarrow \mathbb{Z}$ est un raffinement quadratique d'un réseau et $s = (s_1, \dots, s_n) \in (V^*)^n$. Étant donné un enlacement pointé

$$(G, \lambda, a)$$

où $a \in G^n$, on associe une nouvelle fonction quadratique sur $V \otimes G$ définie par

$$f \otimes \lambda + (\text{id}_{V^*} \otimes \hat{\lambda})(s \otimes a)$$

où $s \otimes a = \sum_j s_j \otimes a_j \in V^* \otimes G$. On définit $\gamma_{f,s}(\lambda, a)$ la somme de Gauss associée à cette fonction quadratique.

Théorème 5 (Deloup, [4]). *Deux enlacements pointés (G, λ, a) et (G, λ', a') sont isomorphes si et seulement si $\gamma_{f,s}(\lambda, a) = \gamma_{f,s}(\lambda', a')$ pour tous les triplets (V, f, s) .*

Il suffit d'un nombre fini de tels triplets pour déterminer la classe d'isomorphisme. Les réseaux (V, f, s) de dimension un sont insuffisants, même pour les enlacements pointés avec un seul élément distingué. J'ignore pour le moment un système complet minimal d'invariants, ce qui serait bien utile pour généraliser les modèles combinatoires de la section précédente.

Le théorème 5 est l'outil algébrique sous-jacent à la construction de l'invariant τ des entrelacs colorés exposé dans la section §4.2.

3.3. La formule de réciprocité. La construction du discriminant $f \mapsto L_f$ préserve les sommes orthogonales. En revanche, son comportement relativement au produit tensoriel de deux réseaux est plus subtil. L'étude va nous permettre de généraliser la formule de Van der Blij présentée dans le paragraphe précédent.

Le monoïde \mathfrak{M} des classes d'isomorphismes d'enlacements sur les groupes abéliens finis possède une infinité de générateurs et de relations, voir [20]. Il est traditionnel de considérer un objet plus simple à manipuler : le groupe de Witt \mathfrak{W} . Rappelons sa définition. Un enlacement $b : G \times G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est dit métabolique s'il existe un sous-groupe H tel que

$$H = H^\perp = \{x \in G \mid b(x, H) = 0\}.$$

On ne demande pas a priori que ce sous-groupe H soit un facteur orthogonal. Le groupe de Witt \mathfrak{W} s'obtient à partir de \mathfrak{M} en décrétant que les formes métaboliques sont nulles. Le groupe de Witt $\mathfrak{W}\Omega$ des fonctions quadratiques se définit de manière analogue, une fonction quadratique $q : G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ étant métabolique si elle vérifie $q(N) = 0$ et $N = N^\perp$ (orthogonalité relative à l'enlacement associé). Le calcul de ces groupes de Witt est classique, voir [26]. La somme de Gauss γ introduite au §3 est invariant du groupe de Witt $\mathfrak{W}\Omega$: elle se factorise en effet en un homomorphisme $\mathfrak{W}\Omega \rightarrow S^1$.

Le problème de base est le suivant. Soit $f : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$ et $g : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ deux réseaux non-dégénérés. Le produit tensoriel $f \otimes g : (V \otimes W) \times (V \otimes W) \rightarrow \mathbb{Z}$ est le réseau défini par

$$(f \otimes g)(x \otimes y, x' \otimes y') = f(x, x')g(y, y'), \quad x, x' \in V, y, y' \in W.$$

Peut-on relier, dans \mathfrak{M} , les (classes d'isomorphismes d') enlacements L_f, L_g et $L_{f \otimes g}$? Cette question paraît difficile en général. En revanche, on peut répondre à cette question dans le cadre des groupes de Witt.

On dispose d'un homomorphisme naturel $j_f : G_f \otimes W \rightarrow G_{f \otimes g}$ défini par

$$j_f([x] \otimes y) = [x \otimes y], \quad x \in V^\sharp, y \in W.$$

De manière similaire, on définit $j_g : V \otimes G_g \rightarrow G_{f \otimes g}$ par

$$j_g(x \otimes [y]) = [x \otimes y], \quad x \in V, y \in W^\sharp.$$

Soient A et B les images dans $G_{f \otimes g}$ de j_f et j_g respectivement. On peut alors considérer les restrictions $\phi_f = \phi_{f \otimes g, c}|_A$ et $\phi_g = \phi_{f \otimes g, c}|_B$. Ce sont des raffinements quadratiques des enlacements $L_f \otimes g$ et de $f \otimes L_g$ respectivement. On peut montrer que $A = B^\perp$ et par suite, que ces raffinements quadratiques induisent des fonctions quadratiques $\bar{\phi}_f$ et $\bar{\phi}_g$ sur les quotients $A/(A \cap A^\perp)$ et $A^\perp/(A \cap A^\perp)$ respectivement.

Théorème 6 (Deloup, [4]). *L'égalité suivante est vérifiée dans $\mathfrak{W}\Omega$:*

$$(7) \quad [G_{f \otimes g}, \phi_{f \otimes g, c}] = [A/(A \cap A^\perp), \bar{\phi}_f] + [A^\perp/(A \cap A^\perp), \bar{\phi}_g].$$

Remarque. Le théorème 6 reste essentiellement² valide sur tout R -module de torsion de type fini.

Revenons au cas où $R = \mathbb{Z}$. En appliquant γ à l'égalité (7), nous obtenons la formule de réciprocité ci-dessous pour les sommes de Gauss. Cette formule généralise la formule de Van der Blij (Lemme 1). On note $\sigma(\cdot)$ la signature d'un réseau (tensorisé par \mathbb{R}), $\tilde{c} \in (V \otimes W) \otimes \mathbb{Q}$ l'élément uniquement déterminé par la propriété $c_{\mathbb{Q}}(\cdot) = f_{\mathbb{Q}}(\tilde{c}, \cdot)$ et par une barre la conjugaison canonique sur \mathbb{C} .

Corollaire 6.1 (Turaev, [28]).

$$\gamma(\varphi_{f \otimes g, c} \circ j_f) = e^{\frac{\pi i}{4}(\sigma(f)\sigma(g) - (f \otimes g)_{\mathbb{Q}}(\tilde{c}, \tilde{c}))} \overline{\gamma(\varphi_{f \otimes g, c} \circ j_g)}.$$

Cette formule est elle-même une généralisation de la formule de ma thèse.

Corollaire 6.2 (Deloup, [5]). *Supposons f, g munis de formes caractéristiques $v = f_{\mathbb{Q}}(\tilde{v}, \cdot)$ et $w = g_{\mathbb{Q}}(\tilde{w}, \cdot)$ respectivement. Alors*

$$\gamma(\varphi_{f, v} \otimes g) = e^{\frac{\pi i}{4}(\sigma(f)\sigma(g) - (f(\tilde{v}, \tilde{v})g(\tilde{w}, \tilde{w})))} \overline{\gamma(f \otimes \varphi_{g, w})}.$$

Les formules de réciprocité sont utilisées dans le calcul d'invariants quantiques. Elles sont un ingrédient technique important dans la (re)construction explicite de la TTQC exposée dans la section suivante §4.

4. THÉORIE TOPOLOGIQUE QUANTIQUE DES CHAMPS ABÉLIENNE

Cette section expose la motivation proprement topologique de nos travaux. Les résultats font largement appel aux techniques algébriques exposées dans la première partie (discriminant, réciprocité, classification stable des enlacements).

²Il n'y a rien à modifier si la multiplication par 2 est un isomorphisme ou si $r^2 - r \in 2R$ pour tout r ; dans le cas général, on peut manquer de formes caractéristiques; le théorème reste vrai pour les réseaux pairs ($c = 0$).

4.1. Invariant associé à l'enlacement. Soit M une variété orientée compacte de dimension 3. On sait que M admet une présentation par chirurgie sur un entrelacs L parallélisé dans S^3 . La topologie quantique explicite, à partir de la théorie des catégories monoïdales tressées, les données combinatoires sur un diagramme D_L d'entrelacs (plus généralement d'un écheveau) pour construire un invariant de la variété $M = S^3_L$ obtenue par chirurgie le long de L . Soit $e : G \times G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un enlacement sur un groupe abélien fini et $f : G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un homomorphisme tel que $2f(x) = 0$ pour tout $x \in G$. Ces données sont équivalentes à raffinement quadratique homogène $q : G \rightarrow \mathbb{Z}$ de e . Du point de vue topologique combinatoire, ce sont les valeurs prises par un foncteur \mathcal{F} d'une catégorie \mathcal{R}_C enrubannée [27] vers une catégorie monoïdale tressée C . Les écheveaux sont les morphismes de \mathcal{R}_C . Le foncteur \mathcal{F} est en particulier un invariant d'isotopie de l'écheveau. Il suffit ici d'explicitier ses valeurs sur des écheveaux élémentaires qui engendrent la catégorie des écheveaux : tout écheveau s'écrit à l'aide de compositions et de produits tensoriels (= juxtaposition) d'écheveaux élémentaires et d'endomorphismes d'identité.

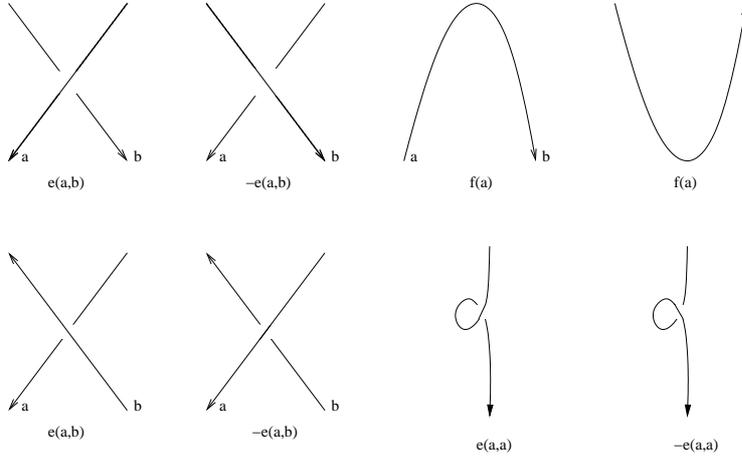


FIG. 1. Le codage des écheveaux élémentaire.

Un entrelacs muni d'un élément $x \in G$ s'identifie à un endomorphisme de l'objet vide. La valeur prise par le foncteur sur un entrelacs est un endomorphisme de l'anneau de base et s'identifie donc à un scalaire. La théorie que nous présentons est abélienne : si un entrelacs L s'écrit comme la juxtaposition $E \otimes E'$ (E' est juxtaposé à droite de E) de deux écheveaux E, E' , alors $\mathcal{F}(L) = \mathcal{F}(E \otimes E') = \mathcal{F}(E) + \mathcal{F}(E')$. De même, $\mathcal{F}(E \circ E') = \mathcal{F}(E) + \mathcal{F}(E')$.

À partir de ces données, nous construisons un invariant $\tau(M, q)$ d'une 3-variété M qui généralise l'invariant de Murakami-Okada-Ohtsuki [21]. Cet invariant s'obtient également par une autre construction due à Viro à partir d'un 3-cocycle abélien au sens d'Eilenberg-McLane [22].

Soit M une 3-variété orientée compacte présentée par chirurgie sur un entrelacs $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ orienté parallélisé dans S^3 . On note A la matrice d'enlacement de L , c'est-à-dire $A_{ij} = lk(L_i, L_j)$ où lk désigne le coefficient entier d'enlacement des composantes L_i et L_j dans S^3 (si $i = j$, $lk(L_i, L_i) = lk(L_i, L'_i)$ où L'_i est un parallèle

de L_i désigné à homotopie près par la parallélisation de L). Nous montrons dans [8] que les données ci-dessus déterminent $\tau(M, q)$ par la formule globale suivante :

$$(8) \quad \tau(M, q) = \gamma(q)^{-\sigma(A)} \gamma(q \otimes A) |H^1(M; G)|^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque. Même si q et A sont non-dégénérés, le produit tensoriel $q \otimes A$ peut l'être. En fait, la nullité de $\tau(M, q)$ est équivalente à l'existence d'un facteur orthogonal dans la décomposition de λ_M [?].

À l'aide de la formule de réciprocité, nous explicitons $\tau(M, q)$ en termes de l'enlacement λ_M qui est intrinsèque à la 3-variété M :

Théorème 7 (Deloup, [8]). *Soit Q un raffinement quadratique homogène de l'enlacement λ_M sur Tors $H_1(M)$. Soit f un réseau muni d'une forme caractéristique $v = f_{\mathbb{Q}}(\tilde{v}, \cdot)$ présentant q via la construction du discriminant, i.e., tel que $\varphi_{f,c} = q$. Alors*

$$(9) \quad \tau(M, q) = \gamma(Q)^{-f(\tilde{v}, \tilde{v})} \gamma(Q \otimes f) |H^1(M; G)|^{\frac{1}{2}}.$$

Corollaire 7.1. *L'invariant τ se généralise aux $(4n - 1)$ -variétés (c'est-à-dire aux variétés closes dont l'enlacement est symétrique).*

À partir de la théorie de Minkowski–Burger, on déduit du Th. 7 :

Corollaire 7.2 (Deloup–Gille, [11]). *Deux $(4n - 1)$ -variétés closes orientées M et M' ont même premier nombre de Betti et enlacements isomorphes si et seulement si $\tau(M, q) = \tau(M', q)$ pour toutes les formes quadratiques $q : G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

On peut remarquer que l'enlacement λ_M et la fonction quadratique jouent des rôles symétriques du point de vue algébrique. Cette remarque peut s'exprimer de façon rigoureuse de la façon suivante. Notons \mathfrak{M} le monoïde des enlacements et $\mathfrak{M}\Omega$ le monoïde des raffinements quadratiques. L'invariant τ peut s'interpréter comme essentiellement une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}\Omega$. Dans ce cadre, l'extension de l'invariant τ aux variétés munies de structures spinorielles est immédiate. En utilisant le fait qu'une structure spin σ sur une 3-variété définit un raffinement quadratique q_σ de l'enlacement (voir §5.1), si l'on note $\tau^{\text{spin}}(M, \sigma)$ l'extension spinorielle, on démontre

Corollaire 7.3 (Deloup, [7]). *Soient (M, σ) et (M', σ') deux 3-variétés closes orientées munies de structures spin et ayant même nombre de Betti. Alors les raffinements quadratiques associées q_σ et $q_{\sigma'}$ sont isomorphes si et seulement si $\tau^{\text{spin}}(M, \sigma) = \tau^{\text{spin}}(M', \sigma')$.*

La généralisation la plus immédiate au cadre spin complexe ne donne pas le résultat escompté : l'invariant ne détermine alors plus le raffinement quadratique associé à isomorphisme près. L'explication tient au fait que le raffinement est non homogène en général. Il est en fait possible de définir une autre généralisation de τ pour les variétés munies d'un 1-cycle (voir aussi la section suivante). Cette généralisation-là classe les (classes d'isomorphismes de) raffinements quadratiques associées aux structures spin complexes, [4].

4.2. L'extension aux cobordismes. Un cobordisme orienté est une variété X^{n+1} orientée telle que $\partial X = A \amalg -B$. Ainsi A et B sont deux n -variétés sans bord, spécifiées, appelées bases du cobordisme. On note le cobordisme $X = (X, A, B)$. Étant donnés deux cobordismes (X, A, B) et (Y, B, C) , on sait les recoller le long de B , on obtient ainsi un cobordisme $(X \cup_B Y, A, C)$. L'idée conduit naturellement à la notion de catégorie de cobordisme, dont les objets sont les variétés orientées de dimension n (éventuellement munies de structures supplémentaires) et les morphismes sont les classes d'équivalence de cobordismes. On demande que l'équivalence soit donnée par des isomorphismes de cobordismes qui soient l'identité sur les bases. La composition est induite par le recollement. Le cylindre $A \times [0, 1]$ représente l'identité. La catégorie possède une involution (renversement d'orientation) et les sommes finies (unions disjointes).

L'invariant τ admet une extension aux 3-cobordismes. Cette extension est très particulière : elle entre dans le cadre des théories topologiques quantiques des champs (TTQCs)³. Une TTQC est grosso modo un foncteur τ de la catégorie des cobordismes vers la catégories des morphismes d'espaces vectoriels (de dimension finie) avec certaines propriétés essentielles relatives à son comportement sur le recollement et l'union disjointe. Ce foncteur présuppose l'existence \mathcal{T} d'un foncteur modulaire sur la catégorie des variétés closes vers la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie, avec notamment la propriété caractéristique suivante :

$$\mathcal{T}(A \amalg B) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Cette propriété est à contraster avec l'additivité des foncteurs de nature homologique ou cohomologique. Le foncteur τ envoie un cobordisme sur un morphisme d'espace vectoriel. La propriété clé est la multiplicativité projective de τ sur les compositions de cobordismes. Si $X \circ Y$ désigne la composition du cobordisme Y suivi de X , alors

$$\tau(X \circ Y) = \mu \cdot \tau(X) \circ \tau(Y), \text{ pour } \mu \in k - \{0\},$$

où k est le corps de base. L'élément μ est appelé l'anomalie de la TTQC.

Il résulte des travaux de Witten [30], ainsi qu'il est explicité dans [2], qu'il existe une procédure universelle pour étendre les invariants quantiques à des invariants de 3-cobordismes. Néanmoins cette construction n'est pas complètement explicite. De plus, même si elle peut être explicitée en dimension 3, elle requiert une combinatoire a priori extrinsèque à la variété, voir [6].

Dans un premier temps, on peut expliciter l'invariant obtenu en réalisant une présentation combinatoire du 3-cobordisme à l'aide d'écheveaux rubannés. Soit $M = (M, \Sigma_+, \Sigma_-)$ un 3-cobordisme orienté. Pour simplifier, supposons ici que les bases sont connexes. Pour chaque entier $g \geq 0$, on fixe un corps en anses orienté non noué de genre g , le corps en anses standard \mathcal{H}_g . On note g_+ et g_- les genres respectifs de Σ_+ et Σ_- . On choisit des paramétrisations (=homeomorphismes préservant l'orientation) $f_{\pm} : \partial \mathcal{H}_{g_{\pm}} \rightarrow \Sigma_{\pm}$. L'idée est la suivante : étant donné un tel cobordisme M , on peut « remplir » les bases de M , à savoir, considérer la 3-variété orientée fermée $M = \mathcal{H}_{g_-} \cup_{f_-} M \cup_{f_+} \mathcal{H}_{g_+}$, à l'aide des paramétrisations f_{\pm} .

³connues sous l'acronyme TQFT en anglais

Le cobordisme paramétré se décrit sur \tilde{M} par un entrelacs orienté et parallélisé $L = L_+ \cup L_-$ où L_\pm a g_\pm composantes $L_1^\pm, \dots, L_{g_\pm}^\pm$. Les composantes sont les images par f_\pm des longitudes de $\partial\mathcal{H}_{g_\pm}$.

Les *couleurs* sont les éléments de G^\pm . Soit $\mathcal{T}(\Sigma_\pm)$ un espace vectoriel sur \mathbb{C} librement engendré par G^{g_\pm} . Par définition, $\mathcal{T}(\Sigma_\pm)$ est de dimension $|G|^\pm$. À $(c_1^\pm, \dots, c_{g_\pm}^\pm) \in G^{g_\pm}$, on associe un 1-cycle dans Σ_\pm à coefficients dans G en définissant

$$\hat{\theta}_\pm = \sum_k c_k^\pm \otimes L_k^\pm.$$

Nous ferons l'abus de notation consistant à utiliser la même notation pour désigner l'image de ce 1-cycle dans \tilde{M} . On pose

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_+ - \hat{\theta}_-.$$

C'est un 1-cycle dans \tilde{M} à coefficients dans G . Par la suite, quand nous aurons besoin de préciser que $\hat{\theta}$ dépend du choix des couleurs, on écrira $\hat{\theta}_{c_+, c_-}$ au lieu de $\hat{\theta}$.

On considère à présent le couple (\tilde{M}, L) . Un isomorphisme entre deux couples $(\tilde{M}, L), (\tilde{M}', L')$ est un homeomorphisme $\phi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}'$ tel que $\phi(L) = L'$. On définit alors un invariant de (\tilde{M}, L) de la manière suivante. On présente (\tilde{M}, L) par chirurgie, c'est-à-dire qu'on considère une paire ordonnée (J, J') d'entrelacs disjoints orientés parallélisés dans S^3 tels que $J = J_1 \cup \dots \cup J_m$ est l'entrelacs de chirurgie : M s'obtient de $S^3 - J$ en recollant m tores solides, envoyant chaque méridien sur la courbe de chirurgie déterminée par la parallélisation sur chaque composante $J - k$ de J , tandis que J' est un entrelacs à $g_+ + g_-$ composantes qui survit à la chirurgie et donne l'entrelacs L après que la chirurgie sur J a eu lieu.

On note $\sigma(J)$ la signature de la matrice d'enlacement de J dans S^3 et A la matrice d'enlacement de $J \cup J'$ dans S^3 .

$$(10) \quad \tau(\tilde{M}, L, q, c_+, c_-) = \gamma(q)^{-\sigma(J)} |G|^{-m/2} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in G^m} \exp(2\pi\sqrt{-1}) (q \otimes A)(x_1, \dots, x_m, c_1^+, \dots, c_{g_+}^+, c_1^-, \dots, c_{g_-}^-).$$

Il est démontré dans [6] que ce nombre est un invariant topologique du couple $(\tilde{M}, \hat{\theta}_{c^-, c^+})$. On peut donc le noter $\tau(\tilde{M}, \hat{\theta}_{c^-, c^+}, q)$. Chaque choix de couleurs c^-, c^+ donne lieu à un 1-cycle $\hat{\theta}_{c^-, c^+}$ (parallélisé). On est alors en mesure de définir $\tau(M) = \tau(M, \Sigma_+, \Sigma_-) : \mathcal{T}(\Sigma_-) \rightarrow \pm_+$ sous forme matricielle relativement aux bases données par les couleurs. Soit $\tau(M) = (\tau_{c^-, c^+})_{\substack{c^- \in G^{g_-} \\ c^+ \in G^{g_+}}}$. Alors

$$\tau_{c^-, c^+} = |G|^{-g_+/2} \tau(\tilde{M}, \hat{\theta}_{c^-, c^+}, q).$$

Théorème 8 (Deloup, [6]). *La règle $\tau : (M, \Sigma_+, \Sigma_-) \mapsto \tau(M)$ définit une TTQC en dimension 3 dont l'anomalie est fonction de l'indice de Leray-Maslov.*

Cette présentation est spécifique à la dimension trois et n'est pas intrinsèque : elle fait appel à la variété auxiliaire \tilde{M} pour définir l'opérateur $\tau(M)$.

On va décrire ici comment construire $\tau(M)$ de façon plus explicite. Rappelons que chaque base est naturellement munie de sa forme d'intersection

$$H_1(\Sigma_{\pm}) \times H_1(\Sigma_{\pm}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

qui est anti-symétrique. Les 1-cycles L_j^{\pm} construits précédemment sur les bases de M déterminent des Lagrangiens Λ_{\pm} dans $H_1(\Sigma_{\pm})$. On se donne aussi des Lagrangiens supplémentaires Λ'_{\pm} de sorte que

$$\Lambda_- \oplus \Lambda'_- = H_1(\Sigma_-), \quad \Lambda_+ \oplus \Lambda'_+ = H_1(\Sigma_+).$$

On remarque que

$$\ell = \Lambda_- \oplus \Lambda_+, \quad \ell' = \Lambda'_- \oplus \Lambda'_+$$

sont des lagrangiens supplémentaires de $H_1(\partial M) = H_1(\Sigma_-) \oplus H_1(\Sigma_+)$.

Soit A^- , resp. A^+ , le groupe abélien libre engendré par $L_1^-, \dots, L_{g_-}^-$, resp. par $L_1^+, \dots, L_{g_+}^+$. On définit $\mathcal{T}(\Sigma_{\pm}) = \mathbb{C}[G \otimes A^{\pm}]$. Dans ce qui suit, on notera (abusivement) i_* tous les homomorphismes induits en homologie par les inclusions. Au lieu de considérer l'enlacement de la variété M , on considère l'enlacement induit sur Tors $H_1(M)/i_*(\ell')$. On le note encore λ_M .

Il est expliqué dans [9] que l'enlacement $e : G \times G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ associé à q et l'enlacement λ_M déterminent un élément caractéristique χ d'ordre 2. Cet élément est nul si l'un des deux groupes G ou Tors $H_1(M)/i_*(\ell')$ est d'ordre impair. On peut alors décrire $\tau(M) : \mathbb{C}[G \otimes A^-] \rightarrow \mathbb{C}[G \otimes A^+]$ de la manière suivante. Il suffit de décrire l'action de $\tau(M)$ sur les éléments de la base, c'est-à-dire sur les éléments de $G \otimes A^-$. Par définition, un élément $x \in G \otimes A^-$ s'écrit $x = \sum_k g_k \otimes L_k^-$. On définit

$$\mathcal{H}(x) = \{\hat{y} \in G \otimes A^+ \mid i_*(y) - i_*(x) = \chi\}.$$

En d'autres termes, un 1-cycle $\hat{y} \in G \otimes A^+$ est considéré comme un élément de $\mathcal{H}(x)$ si et seulement si lorsqu'une fois déformés dans M , les cycles x et y forment un élément homologue à l'élément caractéristique $\chi \in G \otimes H_1(M)/i_*(\ell')$. Soit $\hat{\chi}_{xy} = i_*(x) - i_*(y)$, c'est un 1-cycle à coefficients dans G représentant χ .

Soit maintenant (V, f, c) une présentation de q , i.e., $\varphi_{f,c} = q$ (construction du discriminant). On peut supposer que f est non-dégénérée, de sorte que l'extension de l'adjoint $\hat{f}_{\mathbb{Q}} : V \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \text{Hom}(V \otimes \mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ soit bijective. En particulier, $\hat{f}_{\mathbb{Q}}$ envoie V^{\sharp} sur $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{Z})$. Par définition de la construction, le raffinement quadratique $\varphi_{f,c} : G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ à se relève en une fonction quadratique $V^{\sharp} \rightarrow \mathbb{Q}$ que nous continuons de noter $\varphi_{f,c}$. L'application

$$\Phi_{f,c} = \varphi_{f,c} \circ \hat{f}_{\mathbb{Q}}^{-1} : V^* \rightarrow \mathbb{Q}$$

est une fonction quadratique.

La présentation (V, f) détermine une résolution de G , i.e., on dispose de la suite exacte $0 \rightarrow V \xrightarrow{\hat{f}} V^* \rightarrow G \rightarrow 0$. On peut alors relever à V^* les coefficients des cycles et des classes d'homologie à coefficients dans G . On conservera la même notation.

Soit maintenant un raffinement quadratique homogène q_M de l'enlacement λ_M . On note enfin $\text{lk} = \text{lk}_{\ell'}$ l'enlacement rationnel des *cycles* représentant des éléments de torsion dans $H_1(M)/i_*(\ell')$.

On définit le poids suivant :

$$C(M, \ell', q) = \gamma(f \otimes q_M + (\text{id}_{V^*} \otimes \widehat{\lambda}_M)(\chi)) \cdot \left(\frac{|G \otimes \text{Tors}(H_1(M)/i_*(\ell'))|}{|G \otimes \Lambda_+|} \right)^{1/2}.$$

Dans le membre de droite ci-dessus, $f \otimes q_M : V \otimes \text{Tors}(H_1(M)/i_*(\ell')) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un raffinement quadratique de l'enlacement $f \otimes \lambda_M$. L'application $(\text{id}_{V^*} \otimes \widehat{\lambda}_M)(\chi)$ est un homomorphisme $V \otimes \text{Tors}(H_1(M)/i_*(\ell')) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Donc l'application $f \otimes q_M + (\text{id}_{V^*} \otimes \widehat{\lambda}_M)(\chi)$ est bien un raffinement quadratique de $f \otimes \lambda_M$. Le fait que χ soit un élément caractéristique pour le couple (e, λ_M) assure que la somme de Gauss ci-dessus est toujours non nulle.

On définit alors

$$\tau(M)x = C(M, \ell', q) \cdot \sum_{y \in \mathcal{H}(x)} \exp(2\pi i(\Phi_{f,c} \otimes \text{lk})(\widehat{\chi}_{xy})) y \in \mathbb{C}[G \otimes A^+]$$

Théorème 9 (Deloup, [6]). *Les propriétés suivantes sont vérifiées par l'opérateur $\tau(M)$:*

1. *L'opérateur $\tau(M)$ est indépendant du choix du raffinement quadratique de q_M sur λ_M et de la présentation de (G, q) . Il ne dépend que ℓ' , λ_M et q .*
2. *La règle $(M, \Sigma_-, \Sigma_+) \mapsto \tau(M)$ définit une TTQC en dimension 3. Avec le choix des lagrangiens induits par les paramétrisations des bases, τ coïncide avec la TTQC décrite précédemment.*

Du point de vue topologique, la TTQC ne dépend que de l'enlacement de la variété, modulo le choix des lagrangiens. Une conséquence est le

Corollaire 9.1. *La TTQC se généralise aux cobordismes de dimension $4n - 1$ avec bases de dimension $4n - 2$.*

En écrivant les éléments du groupe de difféotopie (mapping class group) \mathfrak{M}_g de surfaces fermées comme des cylindres paramétrés, on montre que la représentation de \mathfrak{M}_g (qui est toujours projective) est une déformation de la représentation de Shale-Weil. Elle se factorise en particulier par le groupe métaplectique $\text{Mp}(n, \mathbb{R})$ qui est le revêtement double du groupe symplectique $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$.

5. LA THÉORIE COMPLEXE SPIN DES INVARIANTS DE TYPE FINI

Un invariant de variété de dimension trois est de type fini s'il se comporte comme un polynôme relativement à une opération élémentaire fixée. Pour donner un sens précis à cette idée, commençons par rappeler une définition équivalente à la définition usuelle de polynôme. Soit T_u l'opérateur translation $P(X) \mapsto P(X+u)$ sur l'algèbre $\mathbb{R}[X]$ des polynômes. Une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale de degré $< n$ si et seulement si

$$\sum_{J \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|} \left(\prod_{j \in J} T_{x_j} \right) f = 0 \quad \text{pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

L'objet de cette section est d'étendre une théorie d'invariants de type fini, la théorie de Goussarov-Habiro, aux 3-variétés munies de structures spin complexes. Les

structures spin complexes sont des structures de type homotopique apparaissant dans différents contextes, dont l'intérêt a été renouvelé en petites dimensions par la torsion de Reidemeister–Turaev (en dimension 3, avec l'identification des structures d'Euler avec les structures spin complexes) et les invariants de Seiberg–Witten (de variétés simplement connexes en dimension 4).

Soit M une variété close et orientée de dimension trois. Un *trèfle* G dans M est un plongement $G : F \rightarrow M$ d'une surface F obtenue comme épaississement d'un graphe en forme de Y auquel on a attaché à chaque sommet univalent une copie de S^1 . La surface F est donc de genre 0 et possède quatre composantes de bord. Les cercles épaissis sont les *feuilles* de G et les sommets trivalents les *nœuds* de G . La trivialisatation $j : H_3 \rightarrow M$ d'un voisinage régulier H_3 de G dans M , est un plongement, essentiellement unique, d'un corps en anses de genre 3 dans l'intérieur de M . Dans un corps en anses de genre 3 standard, soit L l'entrelacs parallélisé à six composantes représenté dans la figure suivante.

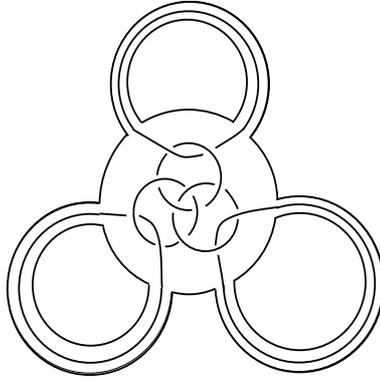


FIG. 2. L'entrelacs L . La parallélisation est induite par la convention que le premier vecteur rencontre l'oeil du lecteur.

Notons $(H_3)_L$ le résultat d'une chirurgie sur L avec la convention usuelle de parallélisation. On pose

$$M_G = M - \text{Int}(\text{Im } j) \cup_{j|_{\partial H_3}} (H_3)_L.$$

Une telle chirurgie est appelée chirurgie *borroméenne*. La relation d'équivalence borroméenne est la relation d'équivalence sur les 3-variétés compactes orientées engendrées par les chirurgies borroméennes et les difféomorphismes préservant l'orientation.

Théorème 10 (Deloup–Massuyeau, [14]). *Il existe une bijection canonique $\text{Spin}^c(M) \rightarrow \text{Spin}^c(M_G)$ permettant d'étendre la chirurgie borroméenne aux 3-variétés compactes orientées munies de structures spin complexes.*

En d'autres termes, étant donné une structure complexe spin $\alpha \in \text{Spin}^c(M)$ et un trèfle G , on peut lui associer de façon non ambiguë une variété M_G munie d'une structure complexe spin $\alpha_G \in \text{Spin}^c(M_G)$. Il est géométriquement clair qu'étant donnés deux trèfles disjoints G_1, G_2 dans M , les variétés spin complexes $((M_{G_1})_{G_2}, (\alpha_{G_1})_{G_2})$ et $((M_{G_2})_{G_1}, (\alpha_{G_2})_{G_1})$ sont Spin^c -difféomorphes. Il y a donc

un sens à définir $(M_{\mathcal{F}}, \alpha_{\mathcal{F}})$ pour une famille finie quelconque de trèfles deux à deux disjoints dans M . On est alors en mesure d'étendre la définition d'invariant de type fini aux structures spin complexes.

Soit f un invariant de structures spin complexes de 3-variétés, à valeurs dans un groupe abélien A . On dit que f est de degré au plus d si pour toute variété complexe spin (M, σ) et pour toute famille \mathcal{F} d'au moins $d + 1$ trèfles deux à deux disjoints dans M ,

$$\sum_{\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}} (-1)^{|\mathcal{F}'|} f(M_{\mathcal{F}'}, \sigma_{\mathcal{F}'}) = 0.$$

En particulier, les invariants de degré 0 sont donc les invariants qui ne distinguent pas la chirurgie borroméennes. Ils sont explicités dans [14]. Le point clé est un plongement de $\text{Spin}^c(M)$ dans un espace de fonctions quadratiques.

5.1. Le plongement des structures spin complexes en dimension 3. Soit M une variété orientée close de dimension trois. Une structure spin complexe σ sur M induit un raffinement quadratique φ_{σ} sur son enlacement $\lambda_M : H^1(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times H^1(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.⁴ Notons $\text{Spin}^c(M)$ l'ensemble des structures spin complexes de M et $\text{Quad}(\lambda_M)$ l'ensemble des raffinements quadratiques de λ_M .

Théorème 11 (Deloup–Massuyeau, [14]). *Il existe une plongement canonique*

$$\text{Spin}^c(M) \rightarrow \text{Quad}(\lambda_M), \sigma \mapsto \varphi_{\sigma}.$$

Ce plongement est affine au-dessus de l'application

$$H^2(M) \rightarrow \text{Hom}(H^1(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), a \mapsto (a \cup \cdot)([M]).$$

De plus :

1. *L'image φ_{σ} d'une structure σ est homogène si et seulement si σ est induite (en général pas de façon injective) par une structure spin.*
2. *L'application φ est bijective si et seulement si M est une sphère d'homologie rationnelle.*

Ce plongement, ainsi que son conoyau, est explicitement décrit dans [14]. Il généralise un résultat due à C. Gille [16] et à l'auteur [9], tous deux obtenus par des méthodes sensiblement différentes. Il est le pendant géométrique du théorème 1. Il montre que les structures spin complexes sont *déterminées* par les raffinements quadratiques correspondants, contrairement à ce qui se passe pour les structures spin.

Corollaire 11.1. *Le raffinement quadratique φ_{σ} est dégénéré dès que $b_1(M) \geq 1$.*

À l'aide du théorème 1, on caractérise les invariants de degré 0 dans la théorie de Goussarov–Habiro pour les structures spin complexes.

Théorème 12 (Deloup–Massuyeau, [14]). *Tout invariant de degré 0 se déduit de la classe d'isomorphisme du raffinement quadratique associé à la structure spin complexe. De façon équivalente, deux structures spin complexes σ, σ' sur des 3-variétés M, M' sont équivalentes au sens borroméen si et seulement si φ_{σ} et $\varphi_{\sigma'}$ sont isomorphes.*

⁴C'est un enlacement légèrement modifié par rapport à la définition usuelle (en particulier, $H^1(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est infini ssi $b_1(M) \geq 1$); il coïncide avec l'enlacement précédemment défini dans l'introduction si M est une sphère d'homologie rationnelle.

5.2. Applications à la torsion de Reidemeister–Turaev. La torsion de Reidemeister–Turaev est un invariant fondamental des structures spin complexes en dimension 3 [29] [23]. On se limite ici au cadre des 3-sphères d’homologie rationnelle orientées. Soit donc M^3 orientée, compacte, connexe telle que $H_*(M; \mathbb{Q}) = H_*(S^3; \mathbb{Q})$. Alors $H = H_1(M)$ est un groupe fini (traditionnellement noté multiplicativement). On suppose M munie d’une structure spin complexe σ . Dans ce cas, la torsion τ de Reidemeister–Turaev est un élément $\tau(M) \in \mathbb{Q}[H]$ qu’on peut écrire

$$\tau(M, \sigma) = \sum_{h \in H} \tau_\sigma(h) h \in \mathbb{Q}[H].$$

Rappelons que H agit transitivement et librement, via la dualité de Poincaré, sur $\text{Spin}^c(M)$. Une propriété importante de τ est l’équivariance relativement à l’action de H :

$$(11) \quad h \cdot \tau(M, \sigma) = \tau(M, h \cdot \sigma), \quad h \in H.$$

Une autre propriété démontrée par Turaev est que τ détermine l’enlacement de M par la relation

$$\tau_\sigma(h_1 h_2) - \tau_\sigma(h_1) - \tau_\sigma(h_2) + \tau_\sigma(1) = -\lambda_M(h_1, h_2) \bmod \mathbb{Z}$$

pour tous $h_1, h_2 \in H$. En particulier, $\tau(M, \sigma)$ détermine également un raffinement quadratique q_σ de l’enlacement en posant $q_\sigma(h) = \tau_\sigma(1) - \tau_\sigma(h^{-1})$.

Il est naturel de comparer ce raffinement quadratique avec celui obtenu par le théorème 11.

Théorème 13 (Deloup–Massuyeau, [13]). *Pour toute sphère d’homologie rationnelle M munie d’une structure spin complexe, $q_\sigma = \varphi_\sigma$.*

Dans sa monographie [23], L. Nicolaescu a démontré le même résultat par une méthode analytique. Notre démonstration est purement topologique et combinatoire. Une conséquence immédiate du théorème 13 est le

Corollaire 13.1. *Le raffinement quadratique φ_σ est déterminé par $\tau(M, \sigma) \bmod 1$.*

Mentionnons une conjecture qui a résisté jusqu’ici à nos efforts et qui permettrait de préciser le lien entre raffinement quadratique associé à une structure spin et l’invariant de Casson–Walker. Pour la motiver, commençons par observer que la réciproque du corollaire 13.1 n’est pas vérifiée. Soit

$$c_\sigma = \tau_\sigma(1) \bmod 1.$$

La torsion de Reidemeister–Turaev ayant la propriété d’équivariance $h \cdot \tau(M, \sigma) = \tau(M, h \cdot \sigma)$ pour tout $h \in H$, on en déduit que

$$c_{h \cdot \sigma} = c_\sigma - \varphi_\sigma(h).$$

Soit maintenant $d_\sigma = \frac{1}{2\pi} \gamma(\varphi_\sigma)$. À l’aide de ce qui précède, on montre que le nombre $C(M) = d_\sigma - c_\sigma \bmod 1$ est un invariant topologique de M , indépendant de la structure σ , additif sur les sommes connexes, s’annule sur les sphères d’homologie entière et change de signe sous le renversement de l’orientation.

Question. Est que $C(M)$ coïncide avec $\frac{1}{|H|}\lambda_{CW}(M)$ modulo 1 où λ_{CW} désigne l'invariant de Casson-Walker (avec la normalisation de Lescop) des sphères d'homologie rationnelle ?

6. PERSPECTIVES

Nous réunissons dans cette section quelques thèmes de recherche autour des enlacements et des intersections que nous abordons dans nos travaux en cours (voir [4]).

6.1. Classifications combinatoires. Nous avons présenté dans §3 le monoïde des enlacements comme un sous-monoïde de tableaux admissibles. Si l'on se restreint aux p -groupes d'ordre fixé, un tableau admissible généralise une partition d'un entier fixé. Dans le cas impair, on obtient une partition signée (et le problème qui suit admet une solution triviale). Dans le cas $p = 2$, on définit l'application oubli qui à un tableau admissible associe sa partition. On peut aussi définir une application oubli – qui se factorise à travers la précédente – en associant à un tableau admissible T son « profil de rangs », c'est-à-dire les entiers k tels que $r_k(T) \neq 0$. Il est raisonnable d'espérer classifier le monoïde \mathfrak{M} à partir des fibres génériques de l'une ou l'autre de ces applications.

Présentons à présent une question un peu plus spéculative. Il est bien connu que l'ensemble Λ_n des partitions (ordonnées) d'un entier n est en correspondance bijective avec l'ensemble des classes de conjugaison du groupe symétrique S_n qui sont elles-mêmes en correspondance bijective avec les représentations irréductibles de S_n . Soit $\mathfrak{T}_n^{\text{adm}}$ l'ensemble des tableaux admissibles $T = (r, s)$ tels que $n = \sum_k r(k)$. Cet objet s'interprète-t-il comme l'ensemble des représentations d'un groupe généralisant le groupe symétrique ? Les représentations irréductibles s'identifieraient alors aux tableaux admissibles. Question : généraliser la combinatoire des tableaux de Young aux tableaux admissibles.

6.2. Généralisations. On peut proposer une généralisation non abélienne de la théorie topologique quantique des champs présentée dans §4. En principe, on remplace le groupe abélien G de la théorie par un groupe non abélien. Par quoi généraliser l'enlacement sur G ? Dans [25], il est essentiellement remplacé par un 3-cocycle « quasi-abélien » sur G . Ce 3-cocycle s'interprète (Street, Turaev) dans le cadre d'une généralisation des catégories monoïdales tressées, autorisant les isomorphismes d'associativité. M. Sokolov a proposé une interprétation en calcul d'écheveau (skein calculus) de l'invariant τ , qui admet elle aussi une généralisation naturelle.

Une généralisation dans une autre direction consiste à considérer des revêtements de variétés et d'y étudier les raffinements de l'enlacement. L'idée est de prendre en compte une action de groupe π . Une partie des résultats présentés ici semble se généraliser effectivement (construction de τ et d'invariants de type fini). Néanmoins, on se heurte, en l'état actuel, à de sérieuses difficultés pour la classification des raffinements, du fait que $\mathbb{Z}[\pi]$ n'est pas noethérien en général.

6.3. Structures spin complexes. Le théorème de plongement affirme que toute structure spin complexe σ sur une 3-variété M compacte orientée s'interprète comme un raffinement quadratique φ_σ de l'enlacement λ_M . Supposons $b_1(M) \geq 1$. Si l'on munit $\text{Quad}(\lambda_M)$ de la topologie naturelle, modelée sur celle de $\text{Hom}(H^1(M; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, alors l'image de φ_σ est *dense* dans $\text{Quad}(\lambda_M)$. L'invariant $\tau(M, \sigma)$, ou plus généralement les invariants de type fini décrits dans la section précédente, s'interprètent donc comme étant associés à un raffinement dans l'image de φ . Il est raisonnable de les généraliser à un raffinement quadratique *quelconque* de λ_M . Cela suggère d'introduire une notion raisonnable de limite d'invariants de type fini.

6.4. Application aux 4-cobordismes. Il s'agit de décrire les intersections positives de 4-variétés lisses bordées par des 3-sphères d'homologie rationnelle. Le point de départ est une interprétation topologique simple du corollaire 2.1 :

Théorème 14. *Soit X une 3-sphère d'homologie rationnelle et soit f une présentation sur réseau de son enlacement. Alors il existe une 4-variété lisse simplement connexe Y telle que $\partial Y = X$ et dont la forme d'intersection est $f \oplus g$ où g est unimodulaire.*

Un résultat profond de Ozsváth-Szabó affirme que l'invariant $\gamma(\varphi_\sigma)$ associé à une structure spin^c d'une 3-sphère d'homologie rationnelle admet une *extension rationnelle* :

Théorème 15. *Soit M une 3-sphère d'homologie rationnelle et $\sigma \in \text{Spin}^c(M)$. Il existe un invariant $d_\sigma \in \mathbb{Q}$ de Spin^c 3-cobordisme de (M, σ) tel que*

$$d_\sigma = \frac{1}{2\pi} \text{Arg}(\gamma(\varphi_\sigma)) \bmod \mathbb{Z}.$$

De plus, si X est une 4-variété lisse simplement connexe définie positive munie d'une structure spin^c θ telle que $\theta|_M = \sigma$, alors

$$d_\sigma \leq \frac{c_1(\theta)^2 - \text{rk}(H^2(X))}{4},$$

où $c_1(\theta)$ est la classe de Chern associée à θ (elle correspond à la forme caractéristique introduite en §2).

On utilise ici une normalisation différente de la normalisation originale.

En l'associant au théorème 14 et à ses raffinements, ce résultat permet d'obtenir des obstructions sur la forme d'intersection d'une 4-variété lisse simplement connexe bordée par une 3-sphère d'homologie dont l'enlacement est fixé.

RÉFÉRENCES

- [1] Blanchet, C., Habegger, N., Masbaum, G., Vogel, P. : Three-manifold invariants derived from the Kauffman bracket. *Topology* 31 (1992), no. 4, 685–699.
- [2] Blanchet, C., Habegger, N., Masbaum, G., Vogel, P. : Topological Quantum Field Theories derived from the Kauffman bracket, *Topology* 34 (1995), 883–927.
- [3] F. van der Blij, *An invariant of quadratic forms modulo 8*, *Indag. Math.* **21** (1959), 291–293.
- [4] F. Deloup : Intersections and linkings in low-dimensional topology, monograph, en préparation.
- [5] Deloup, F. : Linking forms, reciprocity for Gauss sums and invariants of 3-manifolds, doctorat de 3ème cycle, Strasbourg I, 1997.

- [6] Deloup, F. : An explicit construction of an abelian topological quantum field theory in dimension 3. (English. English summary) Proceedings of the Pacific Institute for the Mathematical Sciences Workshop "Invariants of Three-Manifolds" (Calgary, AB, 1999). *Topology Appl.* 127 (2003), no. 1-2, 199–211.
- [7] Deloup, F. : On spin and complex spin Borromean surgeries, *Advances in topological quantum field theory*, 127–133, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 179, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [8] Deloup, F. : Linking forms, reciprocity for Gauss sums and invariants of 3-manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* 351 (1999), no. 5, 1895–1918.
- [9] Deloup, F. : On abelian quantum invariants of links in 3-manifolds, *Math. Ann.* 319, No. 4 (2001), 759 - 795.
- [10] Deloup, F. : Monoïde des enlacements et facteurs orthogonaux. (French) [Linking monoid and orthogonal factors] *Algebr. Geom. Topol.* 5 (2005), 419–442.
- [11] Deloup, F., Gille, C. : Abelian quantum invariants indeed classify linking pairings, *J. Knot Theory & Ramifications* 10 no. 2 (2001), 295–302.
- [12] Deloup, F., Massuyeau, G. : Quadratic functions on torsion groups, *J. Pure Applied Alg.* 198 (2005), 105–121.
- [13] Deloup, F., Massuyeau, G. : Reidemeister-Turaev torsion modulo one of rational homology three-spheres. *Geom. Topol.* 7 (2003), 773–787
- [14] Deloup, F., Massuyeau, G. : Quadratic functions and complex spin structures on three-manifolds, *Topology* 44 (2005), 509–555.
- [15] Deloup, F., Turaev, V. : On Reciprocity, soumis à *J. Pure Applied Algebra*.
- [16] Gille, C. : Sur certains invariants récents de variétés de dimension trois, thèse de doctorat de 3ème cycle, Nantes (1997).
- [17] Hansen, S.K., Takata, T. : Quantum invariants of Seifert 3-manifolds and their asymptotic expansions, *Geometry and Topology Monographs*, Vol. 4 (2002), *Invariants of knots and 3-manifolds* (Kyoto 2001), pages 69–87.
- [18] Jeffrey, L. : Chern-Simons-Witten invariants of lens spaces and torus bundles, and the semiclassical approximation. *Comm. Math. Phys.* 147 (1992), no. 3, 563–604.
- [19] Y. Kitaoka : *Arithmetic of Quadratic Forms*, Cambridge University Press, 1993.
- [20] Kawachi, A., Kojima, S. : Algebraic Classification of Linking Pairings of 3-Manifolds. *Math. Ann.* 253, 29 – 42 (1980).
- [21] Murakami, H., Ohtsuki, T., Okada, M. : Invariants of three-manifolds derived from linking matrices of framed links. *Osaka J. Math.* 29 (1992), no. 3, 545–572.
- [22] Mattes, J., Polyak, M., Reshetikhin, N. : On invariants of 3-manifolds derived from abelian groups, in *Quantum topology*, 324–338, Ser. *Knots Everything*, 3, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1993.
- [23] Nicolaescu, L. : *The Reidemeister torsion of 3-manifolds*, de Gruyter Studies in Mathematics, 30. Walter de Gruyter, Berlin, 2003.
- [24] V.V. Nikulin : Integer symmetric bilinear forms and some of their geometric applications (en russe), *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* 43 (1) (1979) 111-177. Traduction en anglais : *Math. USSR-Izv.* 14(1) (1979) 103-167 (1980).
- [25] Ospel, C. : *Tressages et théories cohomologiques des algèbres de Hopf. Applications aux 3-variétés*, thèse de doctorat, Strasbourg, 1999.
- [26] Scharlau, W. : *Quadratic and Hermitian Forms*. *Grund. Math. Wissen.* no. 270, Springer, New York (1985).
- [27] V.G. Turaev : *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*. de Gruyter Studies in Mathematics, 18. Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
- [28] V.G. Turaev, *Reciprocity for Gauss sums on finite abelian groups*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 124 (1998), no. 2, 205–214.
- [29] V.G. Turaev : *Torsions of 3-dimensional manifolds*, *Progress in Mathematics*, 208. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

- [30] Witten, E. : Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.* 121 (1989), no. 3, 351–399.