## Exercice :

Soit $E$ un espace topologique localement compacte.

$$\mathrm{Homeo}(E) = \{\text{homéomorphismes } f : E \to E\}$$

On munit $\mathrm{Homeo}(E)$ de la topologie « compacte ouverte » : un ouvert est par définition une intersection finie de sous-ensembles $V_{K,U}$ où

$$V_{K;U} = \{ f \in \mathrm{Homeo}(E) \mid f(K) \subset U \}$$

où $K$ est un compact quelconque de $E$ et $U$ un ouvert quelconque de $E$.

Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) L'application $\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Homeo}(E) \\ t & \longmapsto & \varphi_t \end{array}$ est continue

(2) L'application $\begin{array}{ccc} I \times E & \xrightarrow{\Phi} & E \\ (t, x) & \longmapsto & \Phi(t,x) = \varphi_t(x) \end{array}$ est continue.

---

## Solution :

(2) $\Longrightarrow$ (1) : soit $V_{K;U}$ un ouvert élémentaire de $\mathrm{Homeo}(E)$.

Il suffit de montrer que $\varphi^{-1}(V_{K;U})$ est ouvert dans $I$.

(en effet, un ouvert général $V$ de $\mathrm{Homeo}(E)$ est de la forme

$$V = V_{K_1;U_1} \cap \dots \cap V_{K_m;U_m}$$

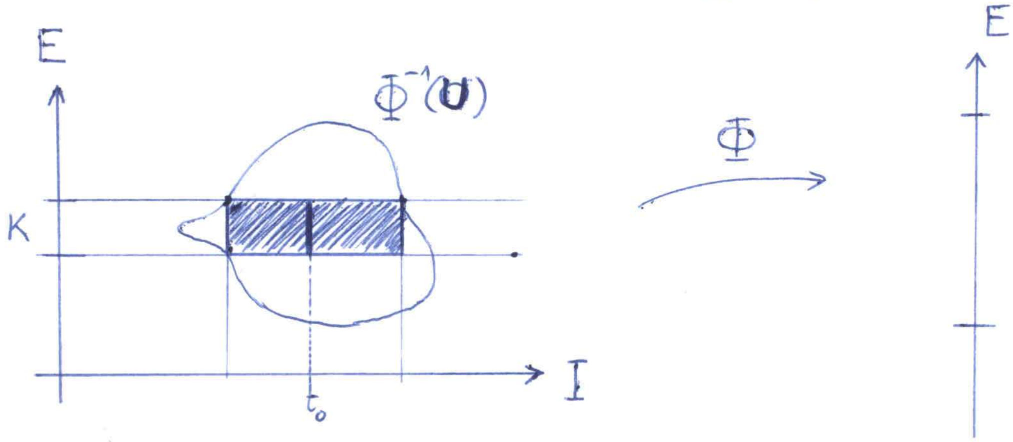
et $\varphi^{-1}(V) = \varphi^{-1}(V_{K_1;U_1}) \cap \dots \cap \varphi^{-1}(V_{K_m;U_m})$.)

$$\varphi^{-1}(V_{K;U}) = \{ t \in I \mid \varphi_t(K) \subseteq U \}$$

~~En particulier, pour tout $t \in \varphi^{-1}(V_{K;U})$~~

$$t \in \varphi^{-1}(V_{K;U}) \iff \forall k \in K,\ \varphi_t(k) \in U$$

$$\iff (t,k) \in \Phi^{-1}(U)$$




Or $\Phi^{-1}(U)$ est ouvert dans $I \times E$ : soit $t_0 \in \varphi^{-1}(V_{K;U})$

pour tout $k \in K$, $(t_0, k) \in \Phi^{-1}(U)$ ;

il existe donc un voisinage ouvert $W_k$ élémentaire de $(t_0, k)$ de la forme $W_k = ]t_0 - \varepsilon_k ; t_0 + \varepsilon_k[ \times V_k$ où $V_k$ est un voisinage ouvert de $k$ dans $E$ tel que $\Phi(W_k) \subseteq U$.

Nous avons : $\bigcup_{k \in K} V_k \supseteq K$ recouvrement ouvert

Comme $K$ est compact, il existe un sous-recouvrement fini de $K$

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{k_i}$$

Alors $\varepsilon = \min(\varepsilon_i) > 0$.

Ainsi pour $t$ tel que $|t - t_0| < \varepsilon$, pour tout $k \in K$, il existe un indice $i$ tel que $(t,k) \in W_{k_i}$ ; donc finalement pour $t$ tel que $|t-t_0|<\varepsilon$, $t \in \varphi^{-1}(V_{K;U})$. CQFD.

$(1) \implies (2)$ : soit $U$ un ouvert de $E$.

Il s'agit de montrer que $\Phi^{-1}(U)$ est ouvert dans $I \times E$.

Soit $(t_0, x_0) \in \Phi^{-1}(U)$.

$(t_0, x_0) \in \Phi^{-1}(U) \iff \varphi_{t_0}(x_0) \in U$

Comme $\varphi_{t_0}$ est continue et que $E$ est <u>localement compact</u>, il existe un voisinage compact $K$ de $x_0$ tel que $\varphi_{t_0}(K) \subset U$.

Comme $\varphi$ est continue, $\varphi^{-1}(V_{K,U})$ est ouvert (et contient $t_0$).

Il existe donc un voisinage $V(t_0)$ ouvert tel que $\forall t \in V(t_0) \subset I$, $\varphi_t(K) \subset U$.

Donc $\forall (t,x) \in V(t_0) \times K$, $\varphi_t(x) \in U$

Or $V(t_0) \times K$ est un voisinage $W$ de $(t_0, x_0)$ dans $I \times E$ : on a ainsi $\forall (t,x) \in W$, $(t,x) \in \Phi^{-1}(U)$.

On en conclut que $\Phi^{-1}(U)$ est ouvert, ce qu'il fallait démontrer. ■