

GROUPES DE DIFFÉOTOPIES DE SURFACES
MASTER 2 – UNIVERSITÉ PAUL SABATIER – TOULOUSE III
SOLUTION D'EXERCICE

FLORIAN DELOUP

Exercice. Soit Σ une surface compacte munie d'une structure différentiable. Le sous-groupe $\text{Diffeo}^+(\Sigma)$ est ouvert dans $\text{Diffeo}(\Sigma)$.

Rappelons que $f \in \text{Diffeo}^+(\Sigma)$ si et seulement si pour tout $p \in \Sigma$, et pour tout couple de cartes (U, ϕ) autour de p et (V, ψ) autour de $f(p)$ telles que $f(U) \subset V$,

$$\det(D^1(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(p))) > 0.$$

Il s'agit de montrer qu'il existe un voisinage de f dans la topologie compacte ouverte qui possède la même propriété.

Soient les données suivantes:

- Un atlas (U_i, ϕ_i) de Σ tel que l'adhérence \bar{U}_i de chaque ouvert est compacte et $f(U_i) \subset U_{j(i)}$ pour tout i ;
- Un recouvrement compact $\{K_i\}_i$ de Σ tel que $K_i \subset U_i$.

On forme l'atlas (V_i, ψ_i) de Σ en posant $V_i = U_{j(i)}$ et $\psi_i = \phi_{j(i)}$.

L'ensemble

$$A_i = \{D^1(\psi_i \circ f \circ \phi_i^{-1})(u) \mid u \in \phi_i(K)\}$$

est un ensemble compacte d'applications linéaires inversibles préservant l'orientation de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . Comme $\text{GL}_2^+(\mathbb{R}) = \{T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \det T > 0\}$ est ouvert dans $\text{GL}_2(\mathbb{R})$, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que si S vérifie $\|T - S\| < \varepsilon_i$ pour $T \in A_i$, alors S est linéaire bijective et préserve l'orientation.

Soit

$$\mathcal{V}_i = \{g \in \text{Diffeo}(\Sigma) \mid g(K_i) \subset V_i, \|D^k(\psi_i f \phi_i^{-1})|_{\phi_i(p)} - D^k(\psi_i g \phi_i^{-1})|_{\phi_i(p)}\| < \varepsilon_i, \\ \text{pour tout } p \in K_i, \text{ pour tout } k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Par définition, \mathcal{V}_i est un ouvert. Comme Σ est compact, on peut supposer que le recouvrement par les K_i est fini et donc qu'il y a un nombre fini d'indices i . Ainsi $\cap_i \mathcal{V}_i$ est un ouvert qui contient f et tout élément $g \in \cap_i \mathcal{V}_i$ préserve l'orientation.

■

Remarques.

- (1) La démonstration est valide en fait en toute dimension (pour toute variété de dimension finie).
- (2) La démonstration est valide aussi si Σ n'est pas compacte en modifiant la topologie de $\text{Diffeo}(\Sigma)$: la topologie adaptée est la topologie de Whitney (voir par exemple M. Hirsch, Differential Topologie, Chap. 2): dans cette topologie, $\cap_i \mathcal{V}_i$ est ouvert même pour un nombre infini d'indices i .