Solution de l'exercice 2 : (suite)

Soit $(\varphi_t)_{t\in I}$ une isotopie entre φ_0 et φ_1.

On a vu que c'est un chemin continu $\begin{array}{rcl} I & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Diffeo}(\Sigma) \\ t & \longmapsto & \varphi_t \end{array}$ (où $\mathrm{Diffeo}(\Sigma)$ est muni de la topologie "compacte-ouverte").

Donc $\varphi(I)$ est connexe.

Or on a vu que $\mathrm{Diffeo}^+(\Sigma)$ est ouvert dans $\mathrm{Diffeo}(\Sigma)$; le même argument montre que $\mathrm{Diffeo}^-(\Sigma) = \mathrm{Diffeo}(\Sigma) \setminus \mathrm{Diffeo}^+(\Sigma)$ est ouvert. Donc $\mathrm{Diffeo}^+(\Sigma)$ et $\mathrm{Diffeo}^-(\Sigma)$ sont deux ouverts disjoints tels que $\mathrm{Diffeo}(\Sigma) = \mathrm{Diffeo}^+(\Sigma) \sqcup \mathrm{Diffeo}^-(\Sigma)$.

Clairement $\{id_\Sigma\} \subset \mathrm{Diffeo}^+(\Sigma)$ et on sait construire (cf. ex 3) un élément de $\mathrm{Diffeo}^-(\Sigma)$ pour toute surface orientable. Donc $\mathrm{Diffeo}^+(\Sigma) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Diffeo}^-(\Sigma) \neq \emptyset$.

Il en résulte que $\varphi(I) \subset \mathrm{Diffeo}^+(\Sigma)$ ou $\varphi(I) \subset \mathrm{Diffeo}^-(\Sigma)$

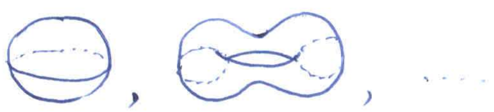
Comme $\varphi(I) \cap \mathrm{Diffeo}^+(\Sigma)$ contient φ_0, c'est que $\varphi(I) \subset \mathrm{Diffeo}^+(\Sigma)$.

Donc $\varphi_1 \in \mathrm{Diffeo}^+(\Sigma)$. ∎

Remarque : $\varphi(I)$ est contenu dans la composante connexe de $\mathrm{Diffeo}^+(\Sigma)$ contenant φ_0.

Ex 3 : Soit Σ une surface orientée

D'après la classification des surfaces, il existe une surface « standard » $\Sigma_g \subset \mathbb{R}^3$ $= S^2$, $T^2 = S^1 \times S^1$ ou $\underbrace{T^2 \# \cdots \# T^2}_{n \geq 2}$ et un difféomorphisme $f : \Sigma \to \Sigma_g$.



Chaque surface standard Σ_g est plongée dans $\mathbb{R}^3$ de telle sorte que le plan $z=0$ est un axe de symétrie de Σ_g ; la symétrie par rapport à cet axe induit un difféomorphisme renversant l'orientation. ∎

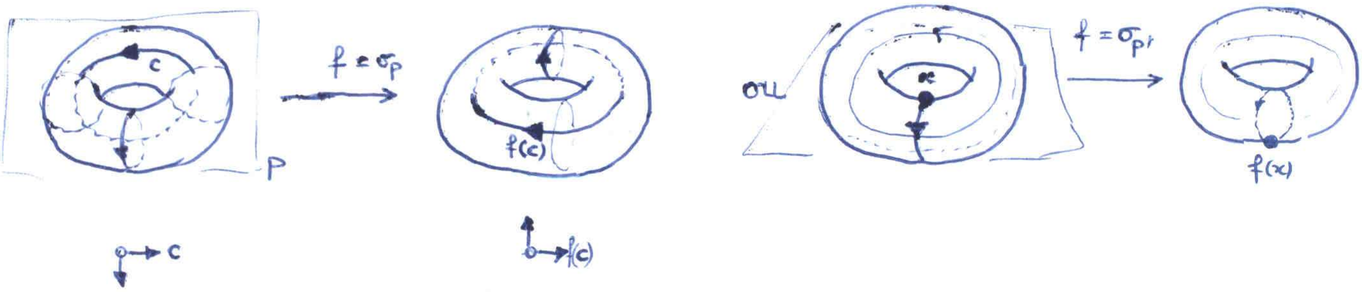
Remarque : pour S^2 et $T^2 = S^1 \times S^1$, on peut écrire des formules explicites

- $S^2 \subset \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$, $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

  L'application (symétrie) : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,-z) \end{array}$ induit un difféomorphisme de $S^2 \to S^2$ renversant l'orientation.

• $S^1\times S^1 \subset \mathbb{C}_{(z)}\times\mathbb{C}_{(w)}$ avec $S^1\times S^1 = \{(z,w)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C} \mid |z|=|w|=1\}$

L'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{C}\times\mathbb{C} & \to & \mathbb{C}\times\mathbb{C} \\ (z,w) & \xmapsto{f} & (z,\bar{w})\end{array}$ est un difféomorphisme induisant un difféomorphisme de $S^1\times S^1$ renversant l'orientation.



• La question a été posée de savoir si l'on peut recoller deux copies de tore avec chacun un difféomorphisme du type ci-dessus.

Soit T_1 la première copie du tore munie du difféomorphisme f_1 renversant l'orientation, soit T_2 la seconde copie du tore munie du difféomorphisme f_2 renversant l'orientation.

Soit $D_i^2\subset T_i$ tel que $f_i(D_i)=D_i$

Alors $f_i : T_i\setminus\mathring{D}_i \longrightarrow T_i\setminus\mathring{D}_i$ est encore un difféomorphisme renversant l'orientation.

Soit $h:\partial D_1\to\partial D_2$ un difféomorphisme renversant l'orientation.

On sait construire une variété différentiable $T_1\# T_2 := \dfrac{T_1\setminus\mathring{D}_1 \sqcup T_2\setminus\mathring{D}_2}{h(x)\sim x,\ x\in\partial D_1}$

$$= (T_1\setminus\mathring{D}_1)\cup_h (T_2\setminus\mathring{D}_2).$$

Pour que l'application $f_1\sqcup f_2 : T_1\setminus\mathring{D}_1\sqcup T_2\setminus D_2 \longrightarrow T_1\setminus\mathring{D}_1\sqcup T_2\setminus\mathring{D}_2$ induise une application $f_1\# f_2 : T_1\# T_2\longrightarrow T_1\# T_2$, il faut et il suffit que

$$h\circ f_1\big|_{\partial D_1} = f_2\big|_{\partial D_2}\circ h$$

$f_1\sqcup f_2$ est un difféomorphisme renversant l'orientation, donc $f_1\# f_2$ est aussi un difféomorphisme renversant l'orientation.