Master 2 – Mathématiques Fondamentales
Rattrapage de l'examen du cours de topologie
À rendre au plus tard le vendredi 4 mars 2011

Problème

On considère le groupe de tresses B_n à n brins. On rappelle que ce groupe s'identifie (par un isomorphisme canonique) au groupe $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,1,n+1})$ des difféotopies du disque fermé $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$ à n piqûres $z_1, \ldots, z_n \in \mathrm{Int}(D)$. On rappelle que ce groupe admet la présentation par générateurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ et relations

- (Commutation) Si $|i-j| > 1$, $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$
- (Artin) Pour $1 \leq i \leq n-2$, $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$.

1. Donner un représentant géométrique ("demi-twist de Dehn") $f_i \in \mathrm{Diff}^+(D)$ du générateur $\sigma_i \in B_n$.

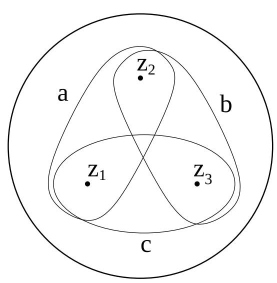
2. Montrer que $f_i^2 = f_i \circ f_i = \tau_i$ où τ_i est le twist de Dehn relatif à une courbe fermée simple encerclant une fois les points z_i et z_{i+1}. En déduire que $\sigma_i^2 = [\tau_i]$ dans B_n.

Dans la suite de l'exercice, $n = 3$. Le groupe B_3 est donc le groupe de tresses à trois brins et est engendré par deux générateurs σ_1 et σ_2 avec une seule relation $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$.

3. Dessiner la (projection générique de la) tresse géométrique représentant σ_1 (resp. σ_2) en précisant bien les extrêmités.

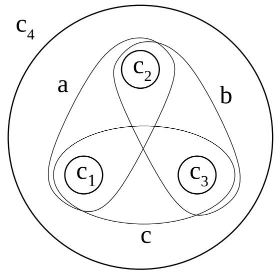
4. On note le produit des tresses de gauche à droite (dans le sens inverse à la composition des difféomorphismes). Soit $\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \in B_3$. Montrer que Δ^2 est dans le centre de B_3. Donner une interprétation géométrique de Δ et de Δ^2.

5. La figure suivante représente D percé par trois piqûres z_1, z_2, z_3 et trois courbes fermées simples a, b, c respectivement.



Écrire les twists de Dehn $[\tau_a], [\tau_b]$ en fonction de σ_1 et de σ_2. Représenter le twist de Dehn τ_c comme une tresse géométrique (la dessiner) et en déduire que $[\tau_c] = \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}$ dans B_3. Vérifier que toutes les tresses correspondant à $[\tau_a], [\tau_b]$ et $[\tau_c]$ sont pures.

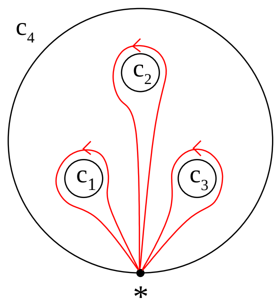
6. On note $\Sigma = \Sigma_{0,4,0}$ la sphère privée de 4 disques deux à deux disjoints (ou, ce qui revient topologiquement au même, le disque privé de 3 disques deux à deux disjoints). on note encore P_3 le groupe des tresses pures à trois brins. On rappelle qu'il existe un isomorphisme $\Phi : \mathfrak{M}(\Sigma_{0,4,0}) \simeq P_3 \times \mathbb{Z}^3$.



La figure suivante représente le disque D unité fermé privé de trois disques dont les bords sont respectivement c_1, c_2, c_3. Le cercle c_4 est le bord de D.

Déterminer $\Phi([\tau_{c_i}])$ $(1 \leq i \leq 3)$ dans $P_3 \times \mathbb{Z}^3$. (Pour un choix naturel de l'isomorphisme Φ, on trouve $\Phi([\tau_{c_1}]) = (1_{B_3},\ (1,0,0)), \Phi([\tau_{c_2}]) = (1_{B_3}, (0,1,0)),\ \Phi([\tau_{c_3}]) = (1_{B_3}, (0,0,1))$.)

7. On fixe un point base $\star = -\sqrt{-1} \in \partial\Sigma$. La figure ci-dessous décrit trois courbes fermées simples $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sur Σ.



7.1. Montrer (ou admettre) que le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma, \star)$ de Σ est le groupe libre F_3 à trois générateurs représentés par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. [On pourra utiliser le fait que Σ est le rétracte par déformation de la figure formée par trois cercles se rencontrant en un unique point puis appliquer deux fois le théorème de Seifert-Van Kampen.]

7.2. On considère le lacet c_4 parcouru une fois dans le sens trigonométrique (positif). Exprimer $[c_4]$ en fonction de $[\alpha_1], [\alpha_2]$ et $[\alpha_3]$ dans $\pi_1(\Sigma, \star)$.

8. Soit w une courbe fermée simple dans Σ basée en $\star$ (on pourra prendre $w = \alpha_i$ pour $i = 1, 2, 3$).

8.1. Dessiner l'image w' de w par τ_{c_1} dans $\Sigma_{0,4,0}$. Montrer que w' est homotope à w. En déduire que $(\tau_{c_1})_\sharp = \mathrm{id}_{\pi_1(\Sigma,\star)}$. En déduire un résultat analogue pour τ_{c_2} et τ_{c_3}. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de Dehn-Baer-Nielsen et conclure que τ_{c_1} est isotope à l'identité ?

8.2. Dessiner l'image de w par τ_{c_4} dans Σ. En déduire que pour tout $x \in \pi_1(\Sigma, \star)$,

$$(\tau_{c_4})_*(x) = [c_4]^{-1} \cdot w \cdot [c_4].$$

9. Montrer que l'image de τ_{c_4} par la projection $\mathfrak{M}(\Sigma_{0,4,0}) \to P_3$ est Δ^2.

10. Montrer l'identité $\Phi([\tau_a] \circ [\tau_b] \circ [\tau_c]) = \Phi([\tau_{c_1}] \circ [\tau_{c_2}] \circ [\tau_{c_3}] \circ [\tau_{c_4}])$ dans $P_3 \times \mathbb{Z}^3$. En déduire que $[\tau_a] \circ [\tau_b] \circ [\tau_c] = [\tau_{c_1}] \circ [\tau_{c_2}] \circ [\tau_{c_3}] \circ [\tau_{c_4}]$ dans $\mathfrak{M}(\Sigma)$.

Commentaire : ceci constitue une autre démonstration de l'identité dite de la lanterne, vue dans l'examen du 11 janvier.

11. Soit $n \geq 0$. Montrer (un dessin suffit) que $\Sigma_{0,2n+1,0}$ se plonge naturellement dans $\Sigma_{n,0,0}$. En déduire un homomorphisme $P_{2n} \times \mathbb{Z}^{2n} \to \mathfrak{M}(\Sigma_{n,0,0})$. Cet homomorphisme est-il injectif ? Est-il surjectif ?

Conventions d'écriture dans ce sujet. Les tresses sont écrites (en fonction des générateurs d'Artin) de gauche à droite, c'est-à-dire que l'on écrit d'abord la première tresse à gauche, puis on la compose avec la seconde en écrivant la seconde tresse à gauche de la première, etc. On se représente les tresses comme des tresses géométriques. De même, les lacets s'écrivent de gauche à droite comme les tresses. En revanche, les difféotopies se composent comme des applications, de droite à gauche, en ce sens que la première difféotopie s'écrit à droite puis on la compose avec la seconde en écrivant la seconde difféotopie à droite de la première, etc.