Groupes des Difféotopies de Surfaces
Exercices (3)

Exercice 1. Calcul de $\mathfrak{M}(S^1)$. Montrer que tout difféomorphisme du cercle S^1 préservant l'orientation est isotope à l'identité.

Exercice 2. Calcul de $\mathfrak{M}(S^1 \times I)$. On identifie S^1 à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On note A l'anneau $S^1 \times I$, $\partial A = \partial_- A \cup \partial_+ A$ avec $\partial_- A = S^1 \times 0$ et $\partial_+ A = S^1 \times 1$. Soit a le chemin orienté défini par $a(t) = (0, t)$, $t \in I = [0, 1]$. On considère l'application

$$\rho : \mathrm{Diff}^+(A, \partial A) \to \pi_1(A, a(0))$$

définie par

$$\rho(f) = [a \star f(\alpha)^{-1}]$$

(classe du lacet défini par le chemin a suivi du chemin $f(a)^{-1}$).

1. Montrer que cette application induit une application (encore notée ρ)

$$\mathfrak{M}(A) \to \pi_1(A, a(0))$$

qui est un morphisme de groupes. (On pourra utiliser les propriétés du revêtement universel de A.)

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit f_n l'application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par la matrice $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que f_n induit un difféomorphisme (préservant l'orientation) de A.

3. Montrer que $\rho(f_n) = n$. En déduire que ρ est surjective.

4. Soit $f \in \mathrm{Diffeo}^+(A)$ tel que $\rho(f)$ est trivial. Montrer que $f_\sharp : \pi_1(A, a(0)) \to \pi_1(A, a(0))$ est l'identité. En déduire que $[f]$ est trivial dans $\mathfrak{M}(A)$.

5. Montrer que $f_n = t^n$ où t est un twist de Dehn relatif à l'âme $S^1 \times 1/2$ de A. En déduire que $\mathfrak{M}(A)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et engendré par $[t]$.

Exercice 3. Soit Σ une surface connexe orientée. Rappelons qu'une courbe fermée simple c est non séparante si $\Sigma \setminus c$ est connexe, et non séparante sinon.

1. Montrer que si c est séparante alors $[c] = 0$ dans $H_1(\Sigma)$. Montrer par un contre-exemple (ou voir l'exercice 4) que la réciproque est fausse.

2. Une courbe fermée simple est *triviale* si elle est homotope à un point dans Σ ou si elle est homotope à une composante de bord de Σ. Montrer que si c est triviale, alors c est séparante.

3. Soit c une courbe fermée simple non séparante. On note $\Sigma_c = \Sigma \setminus c$. Soit M une n-variété compacte munie d'une décomposition cellulaire finie $M = \cup_{j,k} c_k^j$ où chaque c_k^j désigne une cellule ouverte de dimension j. Notons C_j l'ensemble des cellules de dimension j. La caractéristique d'Euler est définie par $\chi(M) = \sum_{j=0}^{\dim M} (-1)^j |C_j|$. On peut montrer que $\chi(M)$ est indépendant

de la décomposition cellulaire choisie (le faire si M est une surface compacte). Montrer que $\chi(\Sigma_c) = \chi(\Sigma)$.

4. Soient c, c' deux courbes fermées simples sur Σ. Montrer qu'il existe un difféomorphisme $f : \Sigma_c \to \Sigma_{c'}$ si et seulement si il existe un difféomorphisme $f : \Sigma \to \Sigma$ préservant l'orientation tel que $f(c) = c'$. En déduire : pour toute paire c, c' de courbes fermées simples non séparantes sur Σ, il existe un difféomorphisme $f : \Sigma \to \Sigma$ tel que $f(c) = c'$.

5. Montrer : une courbe fermée simple homotope à un point borde un disque (on peut utiliser la classification topologique des surfaces et le groupe fondamental).

6. Montrer : une courbe fermée simple homotope à une composante B de bord de Σ coborde avec B un anneau dans Σ.

7. Soient c_1, c_2 deux courbes fermées simples non séparantes sur Σ telles que $i(c_1, c_2) = 0$ (intersection géométrique). Montrer qu'il existe une courbe fermée simple c_3 telle que $i(c_1, c_3) = i(c_3, c_2) = 1$.

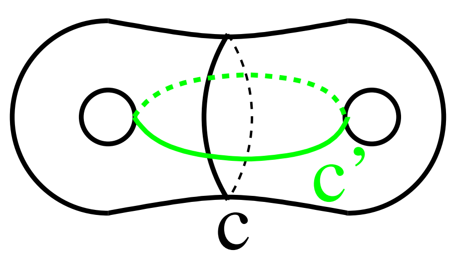
Exercice 4. (Une introduction au sous-groupe de Torelli.) Soit Σ une surface connexe compacte sans bord. On note

$$\bullet : H_1(M) \times H_1(M) \to \mathbb{Z}$$

la forme d'intersection algébrique. L'objet de l'exercice est de démontrer que la représentation symplectique du cours

$$\begin{array}{rcl} \star : \mathfrak{M}(\Sigma) & \to & \mathrm{Sp}_{2g}(H_1(\Sigma), \bullet) \\ [f] & \mapsto & f_\star \end{array}$$

n'est pas injective. Considérer la figure suivante



représentant une paire de courbes fermées simples c et c' sur une surface fermée Σ de genre 2.

1. Montrer que c est homologue à 0 mais n'est pas homotope à un point.

2. Montrer que $t_c(c')$ est homologue à c' mais n'est pas isotope à c'.

3. En utilisant le théorème de Baer, conclure que t_c est un élément non trivial de Ker $\star$.