Groupes de difféotopies de surfaces

Exercices (2)

Exercice 1 :

Soit $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant |z| \leqslant 2 \} \subset \mathbb{C}$ et Σ une surface orientée.

Dessiner (l'image d') un plongement $j : A \to \Sigma$.

Combien y a-t-il de classes d'isotopie distinctes pour j ? (Réponse : 4)

Combien y a-t-il de classes d'isotopie distinctes pour j si j préserve l'orientation ? (Réponse : 2).

Exercice 2 :

Soit γ une courbe fermée simple dans une surface Σ.

On suppose que γ borde un disque dans Σ.

Montrer que le twist de Dehn τ_γ relatif à γ est isotope à l'identité.

Exercice 3

Soit γ une courbe fermée simple dans une surface Σ.

On note $\sim$ la relation d'isotopie.

Montrer que si $\delta \sim \gamma$ alors $\tau_\delta \sim \tau_\delta$

En déduire $\tau_\gamma(\delta) \sim \delta$.

Si δ intersecte transversalement γ en un point p, dessiner $\tau_\gamma(\delta)$ au voisinage de p. Même question si δ intersecte transversalement γ en un nombre fini de points.

Exercice 4

Si $i(\gamma,\delta)=0$, alors $t_\gamma(\delta)\sim\delta$. ($i$ = intersection géométrique)

Exercice 5

Pour $f\in\mathcal{M}(\Sigma)$ et c une courbe fermée simple dans Σ :

$$f\circ t_c\circ f^{-1}=\tau_{f(c)}\qquad (\text{dans } \mathcal{M}(\Sigma))$$

où τ_γ désigne le twist de Dehn relatif à γ.

Exercice 6 :

Soit γ,δ deux courbes fermées simples dans Σ :

$$i(\tau_\gamma(\delta),\delta)=i(\gamma,\delta)^2$$

Plus généralement :

$$i(\tau_\gamma^k(\delta),\delta)=|k|\,i(\gamma,\delta)^2$$

Exercice 7

Soit γ une courbe fermée simple dans Σ.

On note $\tau_{\gamma*}: H_1(\Sigma)\to H_1(\Sigma)$ l'automorphisme induit par le twist de Dehn en homologie. Alors

$$(\tau_{\gamma*})([\delta])=[\delta]+i_\Sigma(\delta,\gamma)[\gamma]$$