Groupes de difféotopies de surfaces

Exercices (1)

Exercice 1 :

Montrer : $\mathrm{Iso}(\Sigma) = \{ f \in \mathrm{Diffeo}(\Sigma, \partial\Sigma),\ f \sim \mathrm{id}_\Sigma \} \triangleleft \mathrm{Diffeo}(\Sigma, \partial\Sigma)$.

Exercice 2 :

Si $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathrm{Diffeo}(\Sigma)$ sont isotopes et φ_0 préserve l'orientation, alors φ_1 préserve aussi l'orientation.

Exercice 3 :

Pour toute surface orientée Σ, il existe un difféomorphisme involutif renversant l'orientation de Σ.

Exercice 4 :

Soit Σ une surface orientée telle que $\partial\Sigma \neq \emptyset$.

Tout difféomorphisme $\varphi : \Sigma \to \Sigma$ tel que $\varphi|_{\partial\Sigma} = \mathrm{id}_{\partial\Sigma}$ préserve l'orientation de Σ.

(C'est la réciproque partielle de : si $\varphi \in \mathrm{Diffeo}(\Sigma)$ préserve l'orientation de Σ, alors $\varphi|_{\partial\Sigma}$ préserve l'orientation de $\partial\Sigma$)

Exercice 5 :

Il n'existe pas d'application C^∞ $f : D^n \to \partial D^n$ laissant le bord ∂D invariant point par point. En déduire le théorème de Brouwer : toute application $F : D^n \to D^n$ de classe C^∞ admet un point fixe.

Exercice 6

Soit $p_1, \dots, p_n$ n points dans le plan $\mathbb{C}$. (distincts).
Une TRESSE GÉOMÉTRIQUE est un ensemble de n chemins

$$f_i : I \longrightarrow \mathbb{C} \times I \qquad 1 \leq i \leq n$$

appelés BRINS vérifiant les propriétés suivantes :

(i) les brins géométriques $f_i(I)$ sont deux à deux disjoints

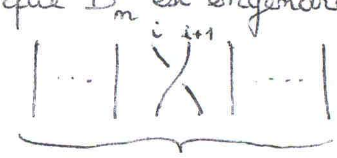
(ii) $f_i(0) = p_i \qquad 1 \leq i \leq n$

(iii) $\forall t \in I, \quad f_i(t) \in \mathbb{C} \times \{t\}$

(iv) il existe une permutation $\sigma_f \in S_n$ telle que $f_i(1) = p_{\sigma_f(i)}$, $1 \leq i \leq n$.

1. Dessiner un exemple de tresse géométrique.
2. Le groupe des tresses à n brins est défini de la manière suivante :
   - on compose les tresses géométriques $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ en définissant
   $$h_i(t) = \begin{cases} f_i(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_{\sigma_f(i)}(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$
   (faire un dessin)
   - on considère les tresses à isotopie près (l'isotopie à chaque instant reste une tresse)

   Trouver l'inverse d'une tresse ; montrer que B_n est engendré par les $n-1$ éléments σ_i $(1 \leq i \leq n-1)$ défini par

   σ_i

3. Montrer que $B_n \xrightarrow{\simeq} \pi_1(\mathcal{C}(\mathbb{C}, n)) = \pi_1(\mathcal{C}(D^2, n))$ où $\mathcal{C}(\mathbb{C}, n)$ (resp. $\mathcal{C}(D^2, n)$) désigne l'espace de configuration de n points distincts, non ordonnés dans $\mathbb{C}$ (resp. D^2).
4. Montrer que $\mathcal{M}(D^2, n) \simeq B_n$.