Groupes de difféotopies de surfaces

Exercices (0)

Exercice 1

Soit Σ une surface compacte

La topologie « compacte-ouverte » sur $\mathrm{Homeo}(\Sigma)$ est définie de la manière suivante :

Pour $\left.\begin{array}{l} K \text{ compact} \\ V \text{ ouvert}\end{array}\right\}$, soit $\mathcal{V}(V,K) = \{ f \in \mathrm{Homeo}(\Sigma),\ f(K) \subset V \}$.

La topologie est par définition engendrée par la sous-base des parties $\mathcal{V}(V,K)$ pour tout compact K et tout ouvert V. Un ouvert quelconque est donc une intersection finie quelconque de parties de cette forme.

Montrer l'équivalence des deux affirmations suivantes :

(1) L'application $\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Homeo}(\Sigma) \\ t & \longmapsto & \varphi_t \end{array}$ est continue

(2) L'application $\begin{array}{ccc} I \times \Sigma & \xrightarrow{\Phi} & \Sigma \\ (t,x) & \longmapsto & \Phi(t,x) = \varphi_t(x) \end{array}$ est continue

et $\forall t \in I,\ \varphi_t \in \mathrm{Homeo}(\Sigma)$.

Exercice 2 : soit Σ une surface compacte, munie d'une structure différentiable.

On munit $\mathrm{Diffeo}(\Sigma)$ de la topologie « compacte-ouverte » :

Soit $f \in \mathrm{Diffeo}(\Sigma)$

(φ, U), (ψ, V) des cartes sur Σ

$K \subset U$ un compact tel que $f(K) \subset V$

$\varepsilon > 0$

Un voisinage sous-fondamental $\mathcal{V}(f, (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon)$ est l'ensemble des difféomorphismes $g : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ de classe C^∞ tels que $g(K) \subset V$ et

$\| D^k(\psi f \varphi^{-1})(u) - D^k(\psi f \varphi^{-1})(u) \| < \varepsilon$ pour tout $u \in \varphi(K)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Un voisinage quelconque de f est ainsi une partie de $\mathrm{Diffeo}(\Sigma)$ contenant l'intersection d'un nombre fini d'ensembles du type $\mathcal{V}(f,(\varphi,U),(\psi,V),K,\varepsilon)$.

1. Montrer : Un chemin $\varphi : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathrm{Diffeo}(\Sigma) \\ t \longmapsto \varphi_t \end{array}$ est continu ssi

l'application $\Phi : \begin{array}{l} I \times \Sigma \longrightarrow \Sigma \\ (t,x) \longmapsto \Phi(t,x) = \varphi_t(x) \end{array}$ est une isotopie entre φ_0 et φ_1.

2. Montrer : $\mathrm{Diffeo}^+(\Sigma)$ est ouvert dans $\mathrm{Diffeo}(\Sigma)$.

(On pourra exprimer la propriété de préserver l'orientation à l'aide de représentations locales avec des cartes).