

Master 2 – Mathématiques Fondamentales
Examen de topologie – 11 janvier 2011

Durée de l'épreuve : 4 heures. Documents de cours autorisés.

Rappels

Soit Σ une surface connexe orientée. Une courbe fermée (ou un lacet) de Σ est l'image par une application $C^\infty \gamma : S^1 \rightarrow \Sigma$. Une courbe fermée simple de Σ est l'image d'un plongement $C^\infty \gamma : S^1 \rightarrow \Sigma$. On rappelle que le groupe $\text{Diff}^+(\Sigma)$ des difféomorphismes positifs de Σ agit transitivement sur les courbes fermées simples non séparantes. L'intersection géométrique de deux courbes fermées simples a, b est notée $i(a, b) \in \mathbb{N}$. L'intersection géométrique s'étend à une réunion de courbes fermées simples deux à deux disjointes : si a_1, \dots, a_n (resp. b_1, \dots, b_p) sont des courbes fermées simples deux à deux disjointes, alors

$$i(a_1 \cup \dots \cup a_n, b_1 \cup \dots \cup b_p) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} i(a_j, b_k).$$

On rappelle que l'intersection géométrique est symétrique et indépendante de l'orientation des courbes. On note

$$\bullet : H_1(\Sigma) \times H_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$$

la forme d'intersection algébrique. On rappelle que \bullet est bilinéaire et antisymétrique. Un automorphisme f de $H_1(\Sigma)$ préserve la forme d'intersection \bullet si $f(x) \bullet f(y) = x \bullet y$ pour tous $x, y \in H_1(\Sigma)$. L'ensemble des automorphismes préservant \bullet forme un sous-groupe $\text{Sp}(H_1(\Sigma), \bullet)$ de $\text{Aut}(H_1(\Sigma))$.

Étant donnée une courbe fermée simple a de classe d'homologie $[a] \in H$, on note t_a le twist gauche de Dehn relatif à a . On note $\tau_a = [t_a]$ l'élément correspondant dans $\mathfrak{M}(\Sigma)$. On rappelle les faits suivants :

- τ_a ne dépend que de la classe d'isotopie de la courbe (non orientée) a ;
- Pour tout $[f] \in \mathfrak{M}(\Sigma)$,

$$[f] \circ \tau_a \circ [f]^{-1} = \tau_{f(a)}.$$

- Pour tout $x \in H$,

$$(t_a)_*(x) = x + (a \bullet x)[a].$$

On notera $\Sigma_{g,b,n}$ "la" surface de genre g compacte connexe de genre g privée de b disques et à n piqûres. On rappelle que $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,0,0})$ est engendré par les twists de Dehn relatifs aux courbes fermées simples non séparantes dans $\Sigma_{g,0,0}$.

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1

I : Éléments primitifs

Soit G un groupe abélien. On dit que $x \in G$ est *primitif* si x n'est multiple non trivial d'aucun élément de G . En d'autres termes, x est primitif s'il vérifie la propriété

$$x = k y, k \in \mathbb{Z} \implies k = \pm 1.$$

1) Soit $\varphi : G \rightarrow H$ un isomorphisme de groupes abéliens. Montrer que x est primitif dans G si et seulement si $\varphi(x)$ est primitif dans H .

Dans la suite de cette partie, on suppose que G est un groupe abélien libre de type fini de rang n .

2) Soit $x \in G$ et H le sous-groupe de G engendré par x . Montrer que x est primitif si et seulement si G/H est libre (de rang $n - 1$).

3) Montrer qu'un élément $x \in G$ est primitif si et seulement s'il existe une base (x_1, \dots, x_n) de G telle que $x = x_1$.

4) On suppose que (x_1, \dots, x_n) est une base de G . Montrer que $y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ est primitif si et seulement si le pgcd de a_1, \dots, a_n est 1.

II : Préliminaires géométriques

1). Soit Σ une surface connexe orientée. L'objet de cette question est de définir des bases distinguées de $H_1(\Sigma)$.

1.1) On suppose Σ compacte sans bord. Montrer qu'il existe $g \geq 0$ et des courbes fermées simples $\lambda_1, \dots, \lambda_g, \mu_1, \dots, \mu_g$ sur Σ telle que

$$i(\lambda_j, \mu_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad i(\lambda_j, \lambda_k) = i(\mu_j, \mu_k) = 0.$$

En déduire qu'il existe une orientation des courbes λ_i, μ_i telle que $l_i = [\lambda_i], m_i = [\mu_i]$ ($1 \leq i \leq g$) forment une \mathbb{Z} -base de $H_1(\Sigma)$ vérifiant

$$l_i \bullet m_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } l_i \bullet l_j = m_i \bullet m_j = 0, \quad \text{pour tous } 1 \leq i, j \leq g.$$

En particulier $H_1(\Sigma)$ est un groupe abélien libre de rang $2g$.

La base $\{l_i, m_i\}_{1 \leq i \leq g}$ est appelée *base symplectique* de $H_1(\Sigma)$. On dit que le système de courbes $\{\lambda_i, \mu_i\}_{1 \leq i \leq g}$ (avec l'orientation appropriée) est une *base symplectique géométrique* de Σ .

1.2) On suppose que Σ a exactement une composante de bord, c'est-à-dire que $\partial\Sigma$ est un cercle. Montrer que Σ a une base symplectique géométrique. [Indication : soit $\widehat{\Sigma}$ la surface à laquelle on a bouché la composante de bord par un disque : $\widehat{\Sigma} = \Sigma \cup D^2$ avec $\partial D^2 = \partial\Sigma$. On pourra considérer l'application induite en homologie par l'inclusion $\Sigma \rightarrow \widehat{\Sigma}$.]

1.3) On suppose que Σ a exactement une piqûre, c'est-à-dire que Σ est le complémentaire d'un point dans une surface Σ' compacte connexe orientée sans bord. Montrer que Σ a une

base symplectique géométrique. [On pourra considérer l'application induite en homologie par l'inclusion $\Sigma \rightarrow \Sigma'$.]

1.4) Dans cette question, $\Sigma = \Sigma_{1,0,0} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est le tore usuel muni de sa base symplectique usuelle ($l = [\lambda], m = [\mu]$). Montrer que les classes d'homotopie de courbes fermées simples sur Σ sont en correspondance bijective avec l'ensemble des éléments primitifs de $H_1(\Sigma) \simeq \mathbb{Z}^2$. [On pourra relever les courbes fermées simples dans l'espace total du revêtement universel $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ou, ce qui revient au même, dans un domaine fondamental de l'action de \mathbb{Z}^2 sur \mathbb{R}^2 .]

Dans toute la suite, on suppose que Σ vérifie l'une des trois hypothèses des questions 1.1, 1.2 et 1.3. On pourra traiter d'abord les questions avec l'hypothèse la plus simple (pas de bord ni de piqure) et vérifier ensuite que le résultat reste valide dans les deux autres cas.

2) L'objet de cette question est d'étudier les classes d'homologie de Σ représentables par une courbe fermée simple non séparante. Soit $\alpha \in H_1(\Sigma)$ une classe d'homologie *non nulle*.

2.1) Montrer qu'il existe une réunion de courbes fermées simples orientées c_1, \dots, c_n vérifiant $i(c_j, c_k) \in \{0, 1\}$ pour tous $1 \leq j, k \leq n$ et $\alpha = [c_1] + \dots + [c_n]$.

2.2) Montrer que s'il existe une courbe fermée simple orientée c telle que $[c] = \alpha$ alors c est non séparante.

Pour les trois questions suivantes (2.3, 2.4 et 2.5), on considère le cas particulier où $\Sigma = \Sigma_{1,0,0}$ est le tore. Soit (l, m) une base symplectique géométrique de Σ .

2.3) On suppose $\alpha = m$. Montrer par un dessin que $2\alpha \in H_1(\Sigma)$ est représenté par une courbe fermée immergée c (avec un point d'auto-intersection). Démontrer qu'il n'existe pas de courbe fermée simple c telle que $2\alpha = [c]$. [On pourra raisonner par l'absurde, considérer un difféomorphisme approprié de Σ .]

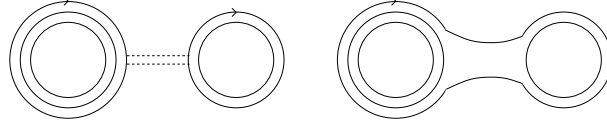
2.4) Montrer qu'il existe une courbe fermée simple c représentant une classe non nulle d'homologie $\alpha = x l + y m \in H_1(\Sigma) \simeq \mathbb{Z}^2$ si et seulement si x et y sont premiers entre eux. Faire un dessin pour $\alpha = l + 2m$ (dessiner une courbe fermée simple représentant α).

2.5) Plus généralement, montrer que le nombre minimal $d \geq 1$ de courbes fermées simples orientées c_1, \dots, c_d deux à deux disjointes telles que $\alpha = x l + y m = [c_1] + \dots + [c_d]$ est $d = \text{pgcd}(x, y)$. Faire un dessin pour $\alpha = 2l + 2m$ (dessiner la réunion disjointe de deux courbes fermées simples représentant α).

2.6) On revient au cas général. Montrer que $\alpha \in H_1(\Sigma)$ est représentée par une courbe fermée simple non séparante si et seulement si α est primitive dans $H_1(\Sigma)$. [Indication : pour la nécessité, utiliser un difféomorphisme approprié de Σ . Pour la réciproque, soit α primitive. Montrer qu'il existe une base de $H_1(\Sigma)$ dont chaque élément est représenté par une courbe fermée simple et dans laquelle les coefficients de α sont tous positifs ou nuls. Appliquer la question 2.1) à α puis réduire par récurrence le nombre de courbes au moyen de l'opération suivante dont le support est une sous-surface de genre 2 :

S'inspirer de l'algorithme d'Euclide.]

2.7) Dans cette question, $\Sigma = \Sigma_{g,0,0}$ (compacte sans bord, sans piqure, connexe, orientée). On considère une base symplectique géométrique $\{\lambda_i, \mu_i\}_{1 \leq i \leq g}$ de Σ .



En utilisant librement la classification des surfaces, montrer que la surface S obtenue en découpant Σ le long des $2g$ courbes (λ_i, μ_i) , $1 \leq i \leq g$, est topologiquement $\Sigma_{0,g,0}$, c'est-à-dire une sphère à g composantes de bord. Chaque composante de bord a une structure privilégiée : elle se constitue de quatre arcs dont l'ordre cyclique est $\lambda_i^-, \mu_i^-, \lambda_i^+, \mu_i^+$.

Le même argument montre que si Σ a une composante de bord alors la surface S ci-dessus est une sphère avec $g + 1$ composantes de bord, avec une composante distinguée ne provenant pas des $2g$ courbes de la base symplectique. De même, si Σ a une piqûre, alors S est une sphère avec g composantes de bord et une piqûre.

III : Représentation symplectique

Dans cette partie, Σ est connexe orientée vérifiant l'une des trois hypothèses suivantes (cf. questions II-1.1, 1.2, 1.3) :

- (1) $\Sigma = \Sigma_{g,0,0}$: surface compacte sans bord ;
- (2) $\Sigma = \Sigma_{g,1,0}$: surface compacte avec une composante de bord ;
- (3) $\Sigma = \Sigma_{g,0,1}$: surface avec une unique piqûre.

On note $H = H_1(\Sigma)$. Dans les trois cas (cf. Partie II), Σ possède une base symplectique géométrique qui détermine un isomorphisme $H \simeq \mathbb{Z}^{2g}$. Soit

$$\mathfrak{M}(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(H), [f] \mapsto f_*$$

la représentation homologique du groupe des difféotopies de Σ .

1) Justifier brièvement que $[f] \mapsto f_*$ est un morphisme de groupes bien défini et que l'image est dans $\text{Sp}(H, \bullet)$.

Soit $\rho : \mathfrak{M}(\Sigma) \rightarrow \text{Sp}(H, \bullet)$ le morphisme correspondant.

2) Soit $\{\lambda_i, \mu_i\}_{1 \leq i \leq g}$ une base symplectique géométrique de Σ . Décrire un isomorphisme entre $\text{Sp}(H, \bullet)$ et $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) = \{M \in \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}) \mid M^T J M = J\}$ où $J = \begin{bmatrix} 0_g & 1_g \\ -1_g & 0_g \end{bmatrix}$. On note encore ρ le morphisme $\mathfrak{M}(\Sigma) \rightarrow \text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$.

L'objectif de cette partie est de démontrer de deux manières que ρ est surjectif.

3) L'objet de cette question est de donner une démonstration en utilisant les twists de Dehn.

Pour $1 \leq j, k \leq g$, on note E_{jk} la matrice carrée élémentaire dont l'unique coefficient non nul est le coefficient (j, k) et égal à 1. On note $A_j = E_{jj}$ et pour $1 \leq k \leq g - 1$, $B_k = E_{kk} + E_{k+1, k+1} - E_{k, k+1} - E_{k+1, k}$. On admet que $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices

$$U_j = \begin{bmatrix} 1_g & A_j \\ 0 & 1_g \end{bmatrix}, V_j = \begin{bmatrix} 1_g & 0 \\ -A_j & 1_g \end{bmatrix}, W_k = \begin{bmatrix} 1_g & C_k \\ 0_g & 1_g \end{bmatrix} \quad (1 \leq j \leq g, 1 \leq k \leq g - 1).$$

Montrer qu'il existe une base de H et $3g - 1$ courbes fermées simples a_j, b_j, c_k , $1 \leq j \leq g$, $1 \leq k \leq g - 1$ tels que $\rho(\tau_{a_j}) = U_j$, $\rho(\tau_{b_j}) = V_j$ et $\rho(\tau_{c_k}) = W_k$. Conclure.

4) L'objet des questions suivantes est de donner une autre démonstration de la surjectivité de ρ . Soit $\psi \in \text{Sp}(H, \bullet)$.

4.1) L'objet de cette question suivantes de trouver un antécédent de ψ dans le cas où l'hypothèse suivante est vérifiée :

(H) : Il existe une autre base symplectique *géométrique* $\{\lambda'_i, \mu'_i\}_{1 \leq i \leq g}$ de Σ telle que

$$\psi([\lambda_i]) = \lambda'_i, \quad \psi([\mu_i]) = \mu'_i, \quad 1 \leq i \leq g.$$

On suppose (H). Construire un difféomorphisme positif f tel que

$$f(\lambda_i) = \lambda'_i, \quad f(\mu_i) = \mu'_i.$$

[On pourra s'aider de la question I-2.7)] Conclure.

4.2) L'objet de cette question est de montrer que l'hypothèse (H) est en réalité toujours satisfaite.

4.3) Montrer qu'il existe une courbe fermée simple orientée λ'_1 représentant $\psi([\lambda_1])$.

4.4) Montrer qu'il existe une base symplectique géométrique $(\nu_j, \pi_j)_{1 \leq j \leq g}$ de Σ telle que $\nu_1 = \lambda'_1$.

4.5) En écrivant $\psi([\mu_1])$ dans la nouvelle base $\{[\nu_j], [\pi_j]\}_{1 \leq j \leq g}$ de H , trouver un ensemble de courbes fermées simples dont la réunion b_1 représente $\psi([\mu_1])$ telle que b_1 intersecte λ'_1 exactement en un point. [Indication : utiliser l'intersection algébrique \bullet .]

4.6) En s'inspirant de la question II-2.6), montrer que l'on peut transformer b_1 en une unique courbe fermée simple μ'_1 sans modifier sa classe d'homologie ni son intersection avec λ'_1 .

4.7) Montrer par récurrence sur g que l'hypothèse (H) est vérifiée. Conclure.

Problème 2

Soit Σ une surface connexe de genre $g \geq 2$ vérifiant l'une des trois hypothèses suivantes (cf. questions II-1.1, 1.2, 1.3) :

- (1) $\Sigma = \Sigma_{g,0,0}$: surface compacte sans bord ;
- (2) $\Sigma = \Sigma_{g,1,0}$: surface compacte avec une composante de bord ;
- (3) $\Sigma = \Sigma_{g,0,1}$: surface avec une unique piqure.

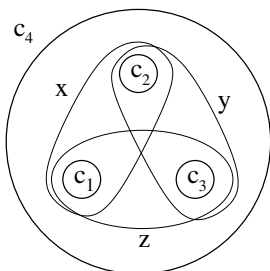
On note $H = H_1(\Sigma)$. Le *sous-groupe de Torelli* $\mathcal{T}(\Sigma)$ est par définition le noyau de l'homomorphisme $\rho : \mathfrak{M}(\Sigma) \rightarrow \text{Sp}(H, \bullet)$, $[f] \mapsto f_*$. C'est donc le sous-groupe normal de $\mathfrak{M}(\Sigma)$ constitué de toutes les classes de difféomorphismes agissant comme l'identité en homologie.

I : La relation de la lanterne et l'abélianisation de $\mathfrak{M}(\Sigma)$

L'objet de cette partie est de démontrer que l'abélianisation de $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,0,0})$ est triviale pour $g \geq 3$.

1) Soit $\Sigma_{0,4,0}$ la sphère à 4 trous (ou si l'on préfère le disque à trois trous) sans piqûre. Montrer (de préférence par un dessin) que pour $g \geq 2$, il existe un plongement $\Sigma_{0,4,0} \rightarrow \Sigma$ pour $g \geq 2$ tel que chacune des quatre composantes de bord de $\Sigma_{0,4,0}$ est envoyée sur une courbe fermée simple non séparante.

2) La figure ci-dessus représente $\Sigma_{0,4,0}$ muni de sept courbes fermées simples $c_1, c_2, c_3, c_4, x, y, z$.



La relation de la lanterne dit que

$$\tau_x \tau_y \tau_z = \tau_{c_1} \tau_{c_2} \tau_{c_3} \tau_{c_4}.$$

Soit I_1, I_2, I_3 trois courts segments joignant c_4 à c_1, c_2, c_3 respectivement. Soit $[f] \in \mathfrak{M}(\Sigma)$. Montrer que si pour chaque $j \in \{1, 2, 3\}$, $f(I_j)$ est isotope à I_j (par une isotopie fixée aux extrémités), alors $[f] = [\text{id}_\Sigma]$. En déduire que pour vérifier la relation ci-dessus, il suffit de vérifier que $t_x t_y t_z (I_j)$ est isotope à $t_{c_1} t_{c_2} t_{c_3} t_{c_4} (I_j)$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$.

3) Démontrer la relation de la lanterne.

4) On suppose que $\Sigma = \Sigma_{g,0,0}$ et $g \geq 3$. Soit

$$\mathfrak{M}(\Sigma)^{\text{ab}} = \mathfrak{M}(\Sigma) / [\mathfrak{M}(\Sigma), \mathfrak{M}(\Sigma)]$$

l'abélianisé de $\mathfrak{M}(\Sigma)$. Montrer que $\mathfrak{M}(\Sigma)^{\text{ab}}$ est cyclique engendré par τ_c où c est une courbe fermée simple non séparante arbitraire de Σ (On commencera par examiner le conjugué d'un twist de Dehn). Utiliser la question 1 pour déduire de la relation de la lanterne que $\tau_c^4 = \tau_c^3$ dans $\mathfrak{M}(\Sigma)^{\text{ab}}$ et conclure.

II : Quelques difféotopies dans $\mathcal{T}(\Sigma)$

1) Soit a une courbe fermée simple séparante. Montrer que $\tau_a \in \mathcal{T}(\Sigma)$. Les twists de Dehn de cette forme sont appelés les twists de Dehn *séparants*. Montrer qu'ils engendrent un sous-groupe normal dans $\mathcal{T}(\Sigma)$.

2) Soient a et b deux courbes fermées simples non séparantes et disjointes. On suppose que $[a] = [b]$ dans H . Montrer que $T_{a,b} = \tau_a \tau_b^{-1} \in \mathcal{T}(\Sigma)$. On dit que $T_{a,b}$ est une difféotopie de *paire bordante*. Montrer que le sous-groupe engendré par les difféotopies de paires bordantes est un sous-groupe normal dans $\mathcal{T}(\Sigma)$.

III : la filtration de Johnson

Dans cette partie, $\Sigma = \Sigma_{g,1,0}$. On fixe un point base p sur $C = \partial\Sigma$ et on note $\pi = \pi_1(\Sigma, p)$.

1) Notons $\langle \tau_C \rangle$ le sous-groupe de $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,0})$ engendré par le twist de Dehn relatif à C . Montrer qu'il existe une suite exacte courte

$$1 \rightarrow \langle \tau_C \rangle \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma_{g,1,0}) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma_{g,0,1}) \rightarrow 1.$$

2) Soit $p \in C = \partial\Sigma_{g,1,0}$. On note $\pi = \pi_1(\Sigma, p)$. Étant donné un groupe G et un entier $k \geq 1$, on note $\Gamma_1 G = G$, $\Gamma_2 G = [G, G]$, $\Gamma_3 G = [G_2, G], \dots, \Gamma_k G = [G_k, G]$. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\Gamma_k \pi \neq \{1\}$ puis que

$$\bigcap_{k \geq 1} \Gamma_k \pi = \{1\}.$$

[Indication : π est un groupe libre à $2g$ générateurs. Que peut-on dire de la longueur minimale d'un mot représentant un élément non trivial de $\Gamma_k \pi$?]

3) Soit $k \geq 1$. Montrer que $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,0})$ agit sur $\pi/\Gamma_k \pi$. On note $\rho_k : \mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,0}) \rightarrow \text{Aut}(\pi/\Gamma_k \pi)$ le morphisme correspondant. Identifier ρ_2 .

On fixe $k \geq 2$.

4) Soit $\mathcal{J}(k) = \text{Ker}(\rho_k)$. Identifier $\mathcal{J}(2)$ et montrer

$$\mathcal{T}(\Sigma_{g,1,0}) \supset \mathcal{J}(3) \supset \mathcal{J}(4) \supset \dots \supset \mathcal{J}(k) \supset \dots$$

5) Soit $[f] \in \mathcal{J}(k)$. Soit $[\gamma] \in H = \pi/\Gamma_2 \pi$. Soit $[f] \mapsto f_{\#}$ le morphisme $\mathfrak{M}(\Sigma_{g,1,0}) \rightarrow \text{Aut}(\pi)$. Montrer que $f_{\#} \gamma \cdot \gamma^{-1} \in \Gamma_k \pi$. En déduire l'existence d'un homomorphisme $\tau_k : \mathcal{J}(k) \rightarrow \text{Hom}(H, \Gamma_k \pi/\Gamma_{k+1} \pi)$ défini par

$$\tau_k([f]) = [f_{\#} \gamma \cdot \gamma] \in \Gamma_k \pi/\Gamma_{k+1} \pi.$$

Montrer que $\text{Ker}(\tau_k) = \mathcal{J}(k+1)$.