Master 2 – Mathématiques Fondamentales
Examen de topologie – 10 mai 2010

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Rappels

Étant donné un espace topologique X et deux sous-espaces A, B. Supposons que $X = A \cup B$. La suite de Mayer-Vietoris associée au triplet (X, A, B) est la suite exacte longue en homologie

$$\cdots \longrightarrow H_k(A\cap B) \xrightarrow{\phi} H_k(A) \oplus H_k(B) \xrightarrow{\psi} H_k(X) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(A\cap B) \longrightarrow \cdots$$

où $\phi : H_k(A\cap B) \to H_k(A),\ x \mapsto (i_*(x), i_*(x))$ est l'homomorphisme induit par les homomorphismes d'inclusions $i_* : H_k(A\cap B) \to H_k(A)$ et $i_* : H_k(A\cap B) \to H_k(B)$ respectivement ; et où $\psi : H_k(A) \oplus H_k(B) \to H_k(X),\ (x, y) \mapsto j_*(x) - j_*(y)$ est l'homomorphisme induit par les homomorphismes d'inclusions $j_* : H_k(A) \to H_k(X)$ et $j_* : H_k(B) \to H_k(X)$ respectivement.

La suite associée au couple (X, A) est la suite exacte longue en homologie

$$\cdots \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_k(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

où l'homomorphisme $H_k(A) \to H_k(X)$ est induit par l'inclusion.

Les mêmes suites restent valides en remplaçant l'homologie H_k par l'homologie réduite $\widetilde{H}_k$. Les k-èmes groupes d'homologie réduite sont les mêmes que les k-èmes groupes d'homologie pour tout $k > 0$; pour $k = 0$, $H_0(X) = \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$. *En particulier, si X est connexe,* $\widetilde{H}_0(X) = 0$. En homologie relative, les groupes d'homologie et les groupes d'homologie réduite coïncident : $\widetilde{H}_k(X, A) = H_k(X, A)$ pour tout $k \geq 0$ (pour $A \neq \varnothing$). Les groupes d'homologie réduite permettent de simplifier les arguments basés sur l'étude des suites exactes ci-dessus.

Problème

Première Partie : préliminaires algébriques

Pour tout groupe abélien fini B, on note $B^* = \mathrm{Hom}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ le dual de B et $|B|$ le cardinal de B.

Un *enlacement* sur un groupe abélien fini G est une application $\ell : G\times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *biadditive symétrique non singulière*. Étant donné un sous-groupe $A \subset G$, on note $A^\perp = \{x \in G \mid \ell(x, A) = 0\}$ l'orthogonal de A. On notera en particulier que $G^\perp = 0$ pour tout enlacement ℓ.

1.1) Soit A un groupe abélien fini quelconque. Montrer que A et A^* sont isomorphes.

Soit $\ell : G \times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un enlacement et A un sous-groupe de G.

1.2) Établir un isomorphisme de groupes : $G/A^\perp \simeq A^*$.

1.3) Établir $A = A^{\perp\perp}$.

1.4) Soit A, B deux sous-groupes de G. Montrer que $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ et $(A\cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$.

1.5) Soit $\ell : G\times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un enlacement vérifiant la propriété suivante (H) : il existe des sous-groupes $A \subset G$ et $B \subset G$ tels que $A = A^\perp$, $B = B^\perp$, et $G = A\oplus B$ (somme directe). Montrer que A et B sont isomorphes en tant que groupes. En déduire que la racine carrée de $|G|$ est un entier.

Un enlacement vérifiant la propriété (H) est dit *hyperbolique*.

1.6) Montrer qu'un enlacement $\ell : G\times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est hyperbolique si et seulement s'il existe deux sous-groupes $A \subset G$ et $B \subset G$ tels que $A \subseteq A^\perp$, $B \subseteq B^\perp$ et $G = A\oplus B$ (somme directe).

1.7) Soit $\ell = \ell_G : G\times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un enlacement. On définit un enlacement $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\ell$ sur $G\oplus G$ par

$$\mathcal{H}(x_1\oplus x_2, x_1'\oplus x_2') = \ell_G(x_1, x_2') + \ell_G(x_2, x_1'), \quad x_i, x_i' \in G,\ i = 1, 2.$$

Montrer que $\mathcal{H}$ est hyperbolique.

1.8) Soit $k \geq 1$. La matrice $M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2^k} \\ \frac{1}{2^k} & 0 \end{bmatrix}$ détermine une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, donc un enlacement, sur $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$. Montrer que cet enlacement est hyperbolique.

1.9) La somme orthogonale de deux enlacements $\ell : G\times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $\ell' : G'\times G' \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'enlacement $e = \ell\oplus\ell'$ défini sur $G\times G'$ par $e(x\oplus x', y\oplus y') = \ell(x,y) + \ell'(x', y')$ pour tout $x, y \in G$ et $x', y' \in G'$.

Étant donné $\ell : G\times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un enlacement, on note $-\ell$ l'enlacement défini par $(-\ell)(x,y) = -\ell(x,y)$ pour tout $x, y \in G$. Supposons de plus que l'application $G \to G,\ x \mapsto 2x$ est inversible. Montrer que la somme orthogonale $e = \ell\oplus(-\ell)$ est un enlacement hyperbolique. (On pourra considérer les sous-groupes $\Delta = \{(x,x) \in G\times G \mid x\in G\}$ et $\overline{\Delta} = \{(x,-x) \in G\times G \mid x \in G\}$.)

Deuxième partie : une identité pour l'enlacement

Soit X une variété différentiable connexe orientée compacte de dimension 4, de bord $\partial X = M$. On rappelle que la composition

$$H_2(X) \xrightarrow{j} H_2(X, \partial X) \xrightarrow{\simeq} H^2(X) \to \mathrm{Hom}(H_2(X), \mathbb{Z})$$

est l'adjoint de la forme d'intersection de X, notée $b_X : H_2(X)\times H_2(X) \to \mathbb{Z}$. Quel est l'isomorphisme dans la formule ci-dessus ?

2.1) L'objet de cette question est de définir un nouveau produit $a = a_X : \mathrm{Tors}\, H_2(X, M)\times \mathrm{Tors}\, H_1(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On commence par le définir pour les cycles. Soit x un 2-cycle relatif représentant un élément de torsion dans $H_2(X, M)$: il existe $m\in\mathbb{Z}$ et une 3-chaîne lisse C dans X ainsi qu'une 2-chaîne lisse α dans M tels que $m\, x = \partial C + \alpha$. Soit y un 1-cycle dans M représentant un élément de torsion. On peut supposer les chaînes C et α transverses à

x. On pose

$$a(x,y) = \frac{C \cdot y}{m} \in \mathbb{Q},$$

où $C \cdot y$ désigne le nombre algébrique d'intersection dans X de la 3-chaîne C avec le 1-cycle y. Montrer que cette définition ne dépend pas du choix de la 3-chaîne C dans X et de la 2-chaîne α dans M transverses à y et tels que $mx = \partial C + \alpha$.

On définit alors $a : H_2(X,M) \times H_1(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par

$$a([x],[y]) = a(x,y) \bmod 1.$$

Montrer que cette définition ne dépend pas du choix des cycles représentant les classes d'homologie $[x],[y]$.

Remarque : on ne demande pas de démontrer que la forme ainsi définie a_X : Tors $H_2(X,M) \times$ Tors $H_1(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ a un adjoint Tors $H_2(X,M) \to \mathrm{Hom}(\text{Tors } H_1(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $x \mapsto a_X(a,-)$ bijectif.

2.2) Décrire brièvement les flèches du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_2(X,M) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & H^2(X) \arrow[d, "i^*"] & \mathrm{Hom}(\text{Tors } H_1(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
H_1(M) \arrow[r] & H^2(M) & \mathrm{Hom}(\text{Tors } H_1(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Dire pourquoi le carré à gauche est commutatif.

On admettra que le carré à droite est également commutatif.

2.3) Soit ℓ_M : Tors $H_1(M) \times$ Tors $H_1(M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ la forme d'enlacement sur M. On note $\partial : H_2(X,M) \to H_1(M)$ et $i_* : H_1(M) \to H_1(X)$ les morphismes bord et d'inclusion respectivement. Démontrer la formule :

$$(1) \qquad \ell_M(\partial x, y) = a_X(x, i_*(y)), \quad \text{pour tous } x \in H_2(X,M),\ y \in \text{Tors } H_1(M).$$

Troisième partie : une condition nécessaire à l'existence d'un plongement

Soit M une variété connexe orientée compacte sans bord de dimension trois. On rappelle que M a un enlacement ℓ_M défini sur Tors $H_1(M)$.

On suppose que M se plonge de façon C^∞ dans $\mathbb{R}^4$.

3.1) Montrer que $\mathbb{R}^4 - M$ a exactement deux composantes connexes. (On pourra considérer le voisinage dans $\mathbb{R}^4$ d'un point de M et considérer deux points $x, y \in \mathbb{R}^4 - M$. Soit γ un chemin lisse générique joignant x à y dans $\mathbb{R}^4$. Étudier l'intersection modulo 2 de γ avec M. Ce nombre dépend-il de γ ? On rappelle que $\mathbb{R}^4$ est simplement connexe.)

On note X et Y les adhérences de ces composantes dans $\mathbb{R}^4$, de sorte que $X \cap Y = M$ et $X \cup Y = \mathbb{R}^4$.

3.2) On note $i_X : H_*(M) \to H_*(X)$ et $i_Y : H_*(M) \to H_*(Y)$ les morphismes induits par les inclusions $M \subset X$ et $M \subset Y$ respectivement. Écrire la suite de Mayer-Vietoris associée à la décomposition $(\mathbb{R}^4, X, Y)$; en déduire que l'application $\phi : H_k(M) \to H_k(X) \oplus$

$H_k(Y)$, $m \mapsto i_X(m) + i_Y(m)$ est un isomorphisme pour $k = 1$ et $k = 2$. En déduire un isomorphisme ψ : Tors $H_k(M) \to$ Tors $H_k(X) \oplus$ Tors $H_k(Y)$ pour $k = 1$ et $k = 2$.

3.3) Écrire les suites exactes en homologie associées au couple (X, M) et au couple (Y, M) respectivement. Déduire les deux suites exactes courtes suivantes :

$$0 \to H_2(X, M) \xrightarrow{\partial} H_1(M) \xrightarrow{i_X} H_1(X) \to 0. \tag{2}$$

et

$$0 \to H_2(Y, M) \xrightarrow{\partial} H_2(M) \xrightarrow{i_Y} H_1(Y) \to 0. \tag{3}$$

3.4) En déduire les suites exactes courtes

$$0 \to \text{Tors } H_2(X, M) \xrightarrow{\partial} \text{Tors } H_1(M) \xrightarrow{i_X} \text{Tors } H_1(X) \to 0. \tag{4}$$

et

$$0 \to \text{Tors } H_2(Y, M) \xrightarrow{\partial} \text{Tors } H_2(M) \xrightarrow{i_Y} \text{Tors } H_1(Y) \to 0. \tag{5}$$

3.5) Montrer que l'enlacement ℓ_M : Tors $H_1(M) \times$ Tors $H_1(M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est hyperbolique. (On pourra considérer les sous-groupes $A, B \subset$ Tors $H_1(M)$ définis par $A = \psi^{-1}(\text{Tors } H_1(X))$ et $B = \psi^{-1}(\text{Tors } H_1(Y))$ et considérer l'orthogonal de ces sous-groupes).

Quatrième partie : Applications

Soit M et N deux variétés connexes de dimension trois orientées compactes et sans bord. On rappelle $M\sharp N$ désigne la *somme connexe* de M et de N : c'est la variété obtenue en enlevant une petite boule à M et à N et en identifiant d'une manière arbitraire les bords (une 2-sphère).

4.1) Notons ℓ_M, ℓ_N et $\ell_{M\sharp N}$ les enlacements de M, N et $M\sharp N$ respectivement. Montrer la décomposition (orthogonale)

$$\ell_{M\sharp N} = \ell_M \sharp \ell_N.$$

(Indication : écrire $M\sharp N = M' \cup N'$ avec $M' = \overline{M - B^3}$ et $N' = \overline{N - B^3}$. Alors $M' \cap N' = \partial B^3$. Écrire la suite exacte en homologie de Mayer-Vietoris associée à $(M\sharp N, M', N')$ et en déduire le résultat voulu.)

4.2) Montrer que si M se plonge dans $\mathbb{R}^4$ et si N se plonge dans $\mathbb{R}^4$ alors $M\sharp N$ se plonge aussi dans $\mathbb{R}^4$.

4.3) On note $-M$ la 3-variété M avec l'orientation opposée. Montrer que $\ell_{-M} = -\ell_M$.

4.4) Montrer que $M\sharp(-M)$ a un enlacement hyperbolique.

4.5) Soit $p \geq q > 0$ des entiers premiers entre eux et soit $L(p, q)$ la variété lenticulaire correspondante. Montrer (par chirurgie ou toute autre méthode) que $H_1(L(p, q)) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et que l'enlacement ℓ est donné par $\ell(x, x) = \frac{q}{p} \bmod 1$ où x désigne un générateur de $H_1(L(p, q))$. (On pourra, par exemple, utiliser la définition par chirurgie de $L(p, q)$ et utiliser deux cycles convenablement choisis représentant un générateur de $H_1(L(p, q))$.)

4.6) Montrer que $L(p, q)$ se plonge dans $\mathbb{R}^4$ ssi $L(p, q) = S^3$.