

**Master 2 – Mathématiques Fondamentales**  
**Corrigé détaillé de l'examen de topologie – 10 mai 2010**

**Problème**

**Première Partie : préliminaires algébriques**

1.1) Pour  $A$  un sous-groupe cyclique d'ordre  $n$  engendré par un élément  $a$ , on dispose de l'enlacement  $(k a, l a) \mapsto \frac{kl}{n} \pmod{1}$ . Dans le cas général, on décompose  $A$  en produit fini de groupes cycliques et on considère la somme orthogonale des enlacements sur ces groupes cycliques : on obtient un enlacement  $A \times A \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  et donc par l'adjoint un isomorphisme  $A \simeq A^*$ . ■

1.2) L'adjoint de  $\ell$  est un isomorphisme  $\widehat{\ell} : G \rightarrow G^*$ . Il induit un morphisme surjectif :  $G \rightarrow A^*, x \mapsto \ell(x, -)|_A$  dont le noyau est par définition  $A^\perp$ . D'où le résultat. ■

1.3) L'inclusion  $A \subset A^{\perp\perp}$  est évidente. D'après 1.1) appliqué aux sous-groupes  $A$  et  $A^\perp$  respectivement,  $|G| = |A^\perp| |A^*| = |A^{\perp\perp}| |A^{*\perp}|$ . Comme  $|A^*| = |A|$  et  $|A^{*\perp}| = |A^\perp|$ , on en déduit que  $|A| = |A^{\perp\perp}|$ . Le résultat s'ensuit. ■

1.4) Pour la première égalité,  $x \in (A+B)^\perp$  ssi  $\ell(x, a+b) = 0$  pour tous  $a \in A, b \in B$  ce qui a lieu ssi  $\ell(x, A) = 0$  et  $\ell(x, B) = 0$  ssi  $x \in A^\perp \cap B^\perp$ . D'où le résultat. Pour la seconde égalité : on prend l'orthogonal de la seconde et on trouve  $(C^\perp \cap D^\perp)^\perp = (C+D)^{\perp\perp} = C+D$  en utilisant la question 1.3. Comme cette identité est vraie pour tous sous-groupes  $C, D \subseteq G$ , on prend  $C = A^\perp$  et  $D = B^\perp$  et on obtient la seconde identité. ■

1.5) Puisque  $G = A \oplus B$ , nous avons

$$\begin{aligned} B &\simeq G/A \\ &= G/A^{\perp\perp} && \text{d'après 1.3} \\ &\simeq (A^\perp)^* && \text{d'après 1.2} \\ &= A^* && \text{puisque } A = A^\perp \\ &\simeq A \end{aligned}$$

On en déduit que  $|G| = |A| \cdot |A| = |A|^2$ . ■

1.6) La condition est clairement nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Nous avons

$$0 = G^\perp = (A \oplus B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$$

d'après la question 1.4. On en déduit

$$|A^\perp \oplus B^\perp| = |A^\perp| \cdot |B^\perp| = |G/A| \cdot |G/B| = |G| |G| / (|A| |B|) = |G|.$$

Comme  $A^\perp + B^\perp \subseteq G$ , on en déduit que  $A^\perp \oplus B^\perp = G = A \oplus B$ . Comme  $A \subseteq A^\perp$  et  $B \subseteq B^\perp$ , on en déduit que  $A = A^\perp$  et  $B = B^\perp$ . C'est le résultat voulu. ■

1.7) Les deux sous-groupes  $H \oplus 0$  et  $0 \oplus H$  vérifient manifestement les propriétés du critère de 1.6. ■

1.8) On applique le résultat de 1.7. à  $G = \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$  muni de l'enlacement  $\ell : (x, y) \mapsto \frac{xy}{2^k} \pmod{1}$  : l'enlacement déterminé par  $M$  n'est autre que l'enlacement  $\mathcal{H}_\ell$ . ■

1.9) Clairement,  $\Delta \cap \overline{\Delta} = 0$ . Pour montrer que  $\Delta + \overline{\Delta} = G \oplus G$ , soit  $(x, y) \in G \oplus G$  et cherchons à l'écrire comme somme de deux éléments de  $\Delta$  et de  $\overline{\Delta}$  respectivement. Nous trouvons  $(x, y) = (a, a) + (b, -b)$  ssi  $x = a + b$  et  $y = a - b$  d'où  $2a = x + y$  et  $2b = x - y$ . Ce système admet une solution si et seulement si la multiplication par 2 est surjective. Enfin, on vérifie que  $\Delta^\perp = \Delta$  en écrivant

$$e(x, x; y, y') = \ell(x, y) - \ell(x, y') = \ell(x, y - y') = 0 \text{ pour tout } x \in G \iff y - y' = 0.$$

C'est le résultat voulu. On vérifie de même que  $(\overline{\Delta})^\perp = \overline{\Delta}$ . ■

### Deuxième partie : une identité pour l'enlacement

Soit  $X$  une variété différentiable connexe orientée compacte de dimension 4, de bord  $\partial X = M$ . On rappelle que la composition

$$H_2(X) \xrightarrow{j} H_2(X, \partial X) \xrightarrow{\cong} H^2(X) \rightarrow \text{Hom}(H_2(X), \mathbb{Z})$$

est l'adjoint de la forme d'intersection de  $X$ , notée  $b_X : H_2(X) \times H_2(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Quel est l'isomorphisme dans la formule ci-dessus ?

C'est l'isomorphisme de dualité de Poincaré.

2.1) On choisit une 3-chaîne  $C'$  dans  $X$  et une 2-chaîne  $\alpha'$  dans  $M$  transverses à  $y$  et vérifiant  $m x = \partial C' + \alpha'$ . Nous avons

$$\partial(C' - C) = \alpha - \alpha'$$

qui est une 2-chaîne dans  $M$  : on en déduit que  $C' - C$  est un 3-cycle relatif et donc détermine un élément  $[C' - C] \in H_3(X, M)$ . Donc le produit  $(C' - C) \cdot y$  se calcule en homologie (ou cohomologie), il est égal à  $[C' - C] \cdot [y] = \text{PD}^{-1}(\text{PD}([C' - C]) \cup \text{PD}([y])) \in \mathbb{Z}$  où  $\text{PD}$  désigne l'isomorphisme de dualité de Poincaré. Le produit

$$H_3(X, M) \times H_1(X) \rightarrow H_4(X, M) = \mathbb{Z}, \quad (u, v) \mapsto u \cdot v = \text{PD}^{-1}(\text{PD}^{-1}u \cup \text{PD}^{-1}v)$$

est biadditif et à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . En particulier, pour  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n [y] = 0$ , nous avons

$$0 = [C' - C] \cdot n [y] = n ([C' - C] \cdot [y]) \in \mathbb{Z}$$

et donc  $[C' - C] \cdot [y] = 0$ . On en déduit que

$$\frac{(C' - C) \cdot y}{m} = \frac{C' \cdot y}{m} - \frac{C \cdot y}{m} = 0.$$

C'est le résultat voulu. ■

On définit alors  $a : H_2(X, M) \times H_1(X) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  par

$$a([x], [y]) = a(x, y) \text{ mod } 1.$$

Montrons que cette définition ne dépend pas du choix des cycles représentant les classes d'homologie  $[x], [y]$ .

Soit  $y'$  un 1-cycle dans  $X$  homologue à  $y$  :  $[y'] = [y]$  dans  $H_1(X)$ . Il existe donc une 2-chaîne  $V$  telle que  $y' - y = \partial V$ . Nous avons alors

$$\frac{C \cdot (y' - y)}{m} = \frac{C \cdot \partial V}{m} = \pm \frac{\partial C \cdot V}{m} = \frac{m x \cdot V}{m} = x \cdot V \in \mathbb{Z}.$$

(Pour la seconde égalité ci-dessus, on utilise l'identité :  $0 = \partial(C \cdot V) = \partial C \cdot V \pm C \cdot V$ .) Il s'ensuit que

$$\frac{C \cdot y'}{m} = \frac{C \cdot y}{m} \pmod{1}.$$

Soit  $x'$  un 2-cycle relatif dans  $X$  homologue à  $x : [x'] = [x]$  dans  $H_2(X, M)$ . Il existe donc des 3-chaînes  $C, C'$  et  $U$  dans  $X$  et des 2-chaînes  $\alpha, \alpha'$  et  $\beta$  dans  $M$  telles que

$$m x' = \partial C' + \alpha, \quad m x = \partial C + \alpha, \quad x' - x = \partial U + \beta.$$

Il en résulte que

$$\partial(C' - C - m U) = m\beta + \alpha - \alpha'$$

qui est une 2-chaîne dans  $M$ . Donc  $C' - C - m U$  est un 2-cycle relatif dans  $X$  : il détermine une classe  $[C' - C - m U] \in H_2(X, M)$ . En particulier,

$$(C' - C - m U) \cdot y = [C' - C - m U] \cdot [y] = 0$$

car  $[y]$  est un élément de torsion. Donc  $(C' - C) \cdot y - m U \cdot y = 0$  d'où

$$\frac{(C' - C) \cdot y}{m} - \frac{m U \cdot y}{m} = \frac{(C' - C) \cdot y}{m} - U \cdot y = 0.$$

Donc

$$\frac{(C' - C) \cdot y}{m} = U \cdot y = 0 \pmod{1}.$$

Ceci achève la démonstration que la définition de  $a_X(x, y) \pmod{1}$  ne dépend que des classes d'homologie de  $x$  et de  $y$ . ■

2.2) La flèche verticale à droite est induite par la restriction au sous-groupe de torsion. Les deux flèches horizontales qui ne sont pas indiquées comme inclusions sont des isomorphismes de dualité de Poincaré. La commutativité du carré à gauche est le théorème du dualité de Poincaré (isomorphisme de Poincaré et naturalité). ■

On admettra que le carré à droite est également commutatif.

2.3) D'après la question précédente, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Tors } H_2(X, M) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}(\text{Tors } H_1(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \text{res} \\ \text{Tors } H_1(M) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}(\text{Tors } H_1(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{array}$$

On a noté  $\text{res}$  l'application naturelle de restriction

$$\text{Hom}(\text{Tors } H_1(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(\text{Tors } H_1(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \quad f \mapsto f \circ i_*,$$

où  $i_* : \text{Tors } H_1(M) \rightarrow \text{Tors } H_1(X)$  est l'homomorphisme d'inclusion.

Soit  $x \in H_2(X, M)$ . La commutativité du diagramme dit que

$$\text{res}(a_X(x, -)) = \ell_M(\partial x, -).$$

Or  $\text{res}(a_X(x, -)) = a_X(x, i_*(-))$ , donc

$$a_X(x, i_*(y)) = \lambda(\partial x, y) \text{ pour tout } y \in \text{Tors } H_1(M).$$

C'est le résultat voulu. ■

### Troisième partie : une condition nécessaire à l'existence d'un plongement

3.1) Soit  $V$  le voisinage dans  $\mathbb{R}^4$  d'un point  $x \in M$ . On choisit deux points  $x, y \in V - M$  et on considère les chemins lisses génériques  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  tels que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$ . (Générique signifie que l'intersection de  $\gamma$  avec  $M$  est transverse ; elle consiste en particulier en un nombre fini de points.) Soit  $\gamma$  un tel chemin. On affirme que l'intersection géométrique  $\gamma(I) \cap M = \gamma^{-1}(M)$  modulo 2 ne dépend pas du chemin  $\gamma$  générique joignant  $x$  à  $y$ . Soit en effet un autre chemin  $\delta$  ayant les mêmes propriétés.

*Démonstration avec l'homologie* : le lacet  $\gamma\delta^{-1}$  définit un 1-cycle dans  $\mathbb{R}^4$ . Comme  $\mathbb{R}^4$  est simplement connexe, ce cycle est trivial en homologie. De même, puisque  $M$  est plongé dans  $\mathbb{R}^4$ ,  $M$  définit un 3-cycle dans  $\mathbb{R}^4$ . Comme  $H_3(\mathbb{R}^4) = 0$ , ce cycle est aussi trivial en homologie. Donc

$$(\gamma\delta^{-1}) \cdot M = [\gamma - \delta] \cdot [M] = 0$$

puisque le produit  $H_1(\mathbb{R}^4) \times H_3(\mathbb{R}^4) \rightarrow H_4(\mathbb{R}^4) = \mathbb{Z}$  est nul. Notons que  $\gamma\delta^{-1} \cdot M$  désigne l'intersection *algébrique* :

$$\gamma\delta^{-1} \cdot M = ((\gamma\delta^{-1}) \cdot M)_{\mathbb{R}^4} = \sum_{p \in (\gamma\delta^{-1}) \cap M} \varepsilon(p) = 0,$$

où  $\varepsilon(p) = \pm 1$  est calculé de la manière habituelle en comparant les orientations des espaces tangents locaux.

Il en résulte que l'intersection *géométrique* de  $\gamma\delta^{-1}(I)$  avec  $M$  est nulle modulo 2 :  $|\gamma\delta^{-1}(I) \cap M| = 0 \pmod{2}$ . On en déduit que

$$|\gamma(I) \cap M| = |\delta(I) \cap M| \pmod{2}.$$

*Démonstration sans homologie* : comme  $\mathbb{R}^4$  est simplement connexe,  $\gamma$  et  $\delta$  sont homotopes relativement aux extrémités  $x$  et  $y$ . Il existe donc une homotopie lisse  $H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^4$  telle que  $H(t, 0) = \gamma(t)$ ,  $H(t, 1) = \delta(t)$  et  $H(0, u) = x$  et  $H(1, u) = y$  (pour tout  $u \in I$ ). Par le théorème de transversalité général (Morse-Sard + Thom), nous pouvons supposer que  $H$  est transverse à  $M$ <sup>1</sup>. Alors  $H^{-1}(M)$  est une sous-variété compacte de  $I \times I$  de dimension 1, dont le bord s'identifie avec l'intersection du lacet  $\gamma \cdot \delta^{-1}$  avec  $M$ . Voir la figure 1.

Formellement  $\partial H^{-1}(M) = \gamma^{-1}(M) \times 0 \cup \delta^{-1}(M) \times 1$ . Autrement dit,  $\partial H^{-1}(M)$  est un cobordisme de dimension 1. Or le bord d'une variété de dimension 1 a toujours un nombre pair de points. Donc

$$|\gamma^{-1}(M) \times 0 \cup \delta^{-1}(M) \times 1| = 0 \pmod{2}, \text{ soit } |\gamma^{-1}(M)| = |\delta^{-1}(M)| \pmod{2}.$$

C'est le résultat voulu.

*Remarque* : une autre façon de voir le même résultat consiste à regarder ce qui se passe quand  $H(-, t)$  cesse d'être transverse à  $M$ , par des arguments de théorie de Morse. Par transversalité, on peut supposer qu'il n'existe qu'un nombre fini de temps  $t_i$  où ceci se produit. Pour tout intervalle ne contenant pas l'un des  $t_i$ , le nombre d'intersection de

<sup>1</sup>Cette hypothèse est plus faible et n'implique pas, en général, que  $H(-, t)$  est transverse à  $M$  en tout  $t$ . Voir aussi plus loin une autre manière de procéder.

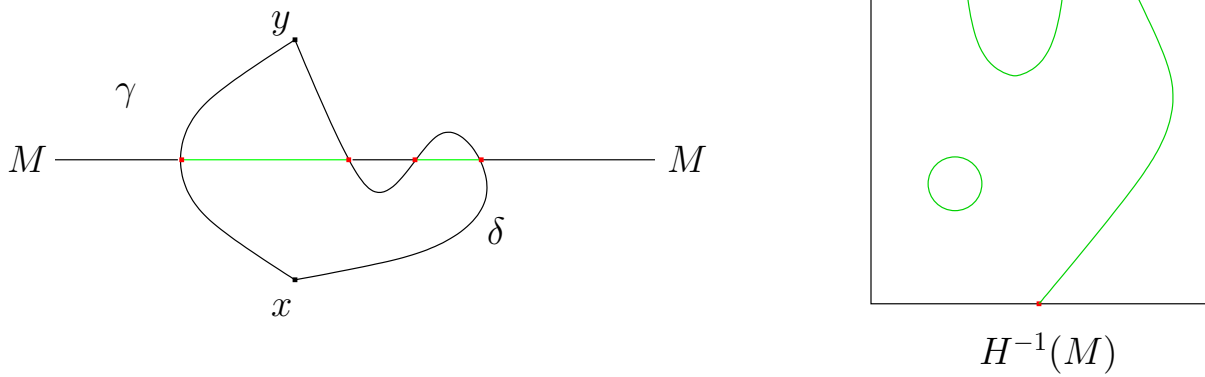


FIG. 1. L'homotopie  $H$  entre deux chemins transverses à  $M$ ; la sous-variété  $H^{-1}(M)$  dans  $I \times I$  et son bord.

$H(-, t)$  avec  $M$  reste constant. Pour un tel  $t_i$ , les nombres d'intersection  $H(I, t_i - \varepsilon)$  et  $H(I, t_i + \varepsilon)$  avec  $M$  diffèrent. Localement, il n'y a que deux types de changements qui peuvent se produire : création ou suppression de points d'intersection. On peut supposer qu'à chaque  $t_i$ , un seul évènement de type local se produit, c'est-à-dire qu'en un seul point  $p$  de l'intersection, l'intersection n'est pas transverse, donc  $T_p H(I, t_i) \oplus T_p M$  est strictement inclus dans  $T_p \mathbb{R}^4$  donc  $T_p H(I, t_i)$  est inclus dans  $T_p M$ . La figure 2 représente l'un des évènements possibles : deux points d'intersection s'annihilent. L'autre possibilité est la création de deux points d'intersection.

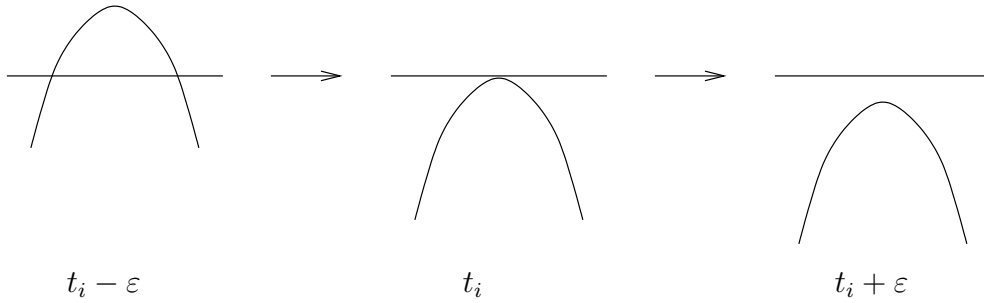


FIG. 2. Un évènement local.

Dans les deux cas, le nombre d'intersection n'est pas modifié modulo 2, ce qui est le résultat cherché. ■

À présent, pour un voisinage  $V$  d'un point  $x$  de  $M$  assez petit,  $V - M$  a deux composantes (ceci résulte de la description locale de  $M$  comme sous-variété de  $\mathbb{R}^4$ ). Choisissons  $x$  et  $y$  dans chacune de ces composantes. Il existe un chemin  $\gamma$  joignant  $x$  à  $y$ , transverse à  $M$  et dont l'intersection avec  $M$  est un unique point. Nous affirmons que  $x$  et  $y$  sont dans deux composantes connexes distinctes de  $\mathbb{R}^4 - M$  : sinon il existe un chemin  $\delta$  lisse joignant  $x$  à  $y$  et dont l'intersection avec  $M$  serait vide, ce qui contredit le fait que le nombre de points d'intersection doit être 1 modulo 2. ■

3.2) La suite de Mayer-Vietoris s'écrit

$$\cdots \rightarrow H_2(\mathbb{R}^4) \rightarrow H_1(M) \xrightarrow{i_X+i_Y} H_1(X) \oplus H_1(Y) \rightarrow H_1(\mathbb{R}^4) \rightarrow \cdots$$

Comme  $H_2(\mathbb{R}^4) = H_1(\mathbb{R}^4) = 0$ , le premier isomorphisme s'en déduit. En considérant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Tors } H_1(M) & \longrightarrow & \text{Tors } H_1(X) \oplus \text{Tors } H_1(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_1(M) & \xrightarrow[\simeq]{i_X+i_Y} & H_1(X) \oplus H_1(Y) \end{array}$$

l'isomorphisme pour les sous-groupes de torsion s'en déduit aisément.

La même suite de Mayer-Vietoris donne

$$\cdots \rightarrow H_3(\mathbb{R}^4) \rightarrow H_2(M) \xrightarrow{i_X+i_Y} H_2(X) \oplus H_1(Y) \rightarrow H_2(\mathbb{R}^4) \rightarrow \cdots$$

Comme  $H_2(\mathbb{R}^4) = H_3(\mathbb{R}^4) = 0$ , on déduit le troisième isomorphisme. L'isomorphisme sur les sous-groupes de torsion s'en déduit comme précédemment. ■

3.3) Il suffit de montrer la première suite exacte courte. La démonstration de la seconde s'obtient en remplaçant  $X$  par  $Y$ . Considérons la suite exacte longue en homologie associée à  $(X, M)$  :

$$\cdots \rightarrow H_2(M) \xrightarrow{i_X} H_2(X) \rightarrow H_2(X, M) \rightarrow H_1(M) \xrightarrow{i_X} H_1(X) \rightarrow 0.$$

Le morphisme  $i_X : H_2(M) \rightarrow H_2(X)$  est surjectif d'après la question précédente. Comme la suite est exacte, on en déduit que le morphisme  $j_X : H_2(X) \rightarrow H_2(X, M)$  est nul et que le morphisme  $\partial : H_2(X, M) \rightarrow H_1(M)$  est injectif. Ceci démontre que la suite de l'énoncé est exacte. ■

3.4) Il suffit d'établir la première suite exacte ; la seconde se déduit en échangeant  $X$  et  $Y$ . Pour cela, il suffit de compléter le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_2(X, M) & \xrightarrow{\partial_X} & H_1(M) & \xrightarrow{i_X} & H_1(X) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Tors } H_2(X, M) & \dashrightarrow & \text{Tors } H_1(M) & \twoheadrightarrow & \text{Tors } H_1(X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

et de montrer que la ligne du bas est exacte. Le morphisme  $i_X|_{\text{Tors } H_1(M)}$  est surjectif d'après la question 2.2. Le morphisme  $\partial_X|_{\text{Tors } H_1(M)}$  est injectif puisque c'est la restriction de  $\partial_X$  qui est injectif. Il reste à voir que  $\text{Im}(\partial_X|_{\text{Tors } H_1(M)}) = \text{Ker}(i_X|_{\text{Tors } H_1(M)})$ . Nous avons

$$\text{Ker}(i_X|_{\text{Tors } H_1(M)}) = \text{Ker}(i_X) \cap \text{Tors } H_1(M) = \text{Im}(\partial_X) \cap \text{Tors } H_1(M) = \text{Im}(\partial_X|_{\text{Tors } H_2(X, M)}),$$

la dernière égalité résultant de ce que  $\partial_X$  est injectif. C'est le résultat voulu. ■

3.5) D'après la question précédente,  $\partial \text{Tors } H_2(X, M) = B \simeq \text{Tors } H_1(Y)$  et  $\partial \text{Tors } H_2(Y, M) = A \simeq \text{Tors } H_1(X)$ . Soit  $\partial x \in A$  et  $\partial y \in B$ . D'après l'identité démontrée à la question 2.3,

nous avons

$$\ell_M(\partial x, \partial y) = a_X(x, i_* \partial y) = a_X(x, 0) = 0,$$

puisque  $i_* \circ \partial = 0$ . Ceci montre que  $A \subset A^\perp$ . On montre de même que  $B \subseteq B^\perp$ . On applique alors le résultat de la question 1.6 pour conclure. ■

### Quatrième partie : Applications

4.1) La suite exacte de Mayer-Vietoris est

$$\cdots \rightarrow H_1(S^2) = 0 \rightarrow H_1(M') \oplus H_1(N') \rightarrow H_1(M\sharp N) \rightarrow \tilde{H}_0(S^2) = 0,$$

d'où l'on déduit l'isomorphisme  $H_1(M') \oplus H_1(N') \simeq H_1(M\sharp N)$ . Il reste à observer que  $H_1(M') = H_1(M)$  et  $H_1(N') = H_1(N)$  : un argument consiste à remarquer le recollement d'une boule (le long d'une 2-sphère) ne modifie pas le groupe fondamental (par le théorème de Seifert-Van Kampen) ; ou encore on peut utiliser la suite de Mayer-Vietoris associée à  $(M, M', B^3)$ . Il est évident que l'enlacement sur Tors  $H_1(M\sharp N)$  respecte la décomposition Tors  $H_1(M\sharp N) \simeq \text{Tors } H_1(M) \oplus \text{Tors } H_1(N)$ . ■

4.2) Si  $M$  (resp.  $N$ ) se plonge dans  $\mathbb{R}^4$ , alors  $M'$  (resp.  $N'$ ) se plonge aussi. On en déduit que le recollement  $M\sharp N$  se plonge aussi dans  $\mathbb{R}^4$ . ■

4.3) Nous avons  $H_1(-M) = H_1(M)$ . Soit  $x, y$  des cycles représentant des éléments de torsion dans  $H_1(M)$ . Soit  $C$  une 2-chaîne lisse dans  $M$ , intersectant transversalement  $y$  et telle que  $\partial C = n x$ . Rappelons comment se calcule l'intersection algébrique  $C \cdot y$  :  $(C \cdot y)_M = \sum_{p \in C \cap y} \varepsilon(p)$  où

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} +1 & \text{si orientation}(T_p C \oplus T_p y) = \text{orientation}(T_p M). \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si l'orientation de  $M$  change, alors l'orientation de  $T_p M$  change aussi :  $T_p(-M) = -T_p(M)$ . Il en résulte que  $(C \cdot y)_{-M} = -(C \cdot y)_M$ . Donc  $\ell_{-M} = -\ell_M$ . ■

4.4) D'après les questions 4.1) et 4.3),  $\ell_{M\sharp(-M)} = \ell_M \oplus \ell_{-M} = \ell_M \oplus (-\ell_M)$ . On applique alors le résultat de la question 1.9). ■

4.5) En utilisant Seifert-Van Kampen ou Mayer-Vietoris ou la théorie des revêtements, on montre que  $H_1(L(p, q)) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Pour calculer l'enlacement, on peut choisir des cycles spécifiques : adoptons la présentation de  $L(p, q)$  comme le recollement de deux tores solides avec la prescription  $h(\mu_2) = q \mu_1 + p \lambda_1$  où  $\mu$  désigne le méridien orienté,  $\lambda$  la longitude standard orientée et  $h$  le difféomorphisme de recollement entre les tores surfaces. On choisit les orientations de telle sorte que  $\mu \cdot \lambda = +1$ . La courbe  $\mu_2 \sim h(\mu_2)$  vue dans  $L(p, q)$  borde à présent un disque et est donc triviale en homologie. Donc  $q[\mu_1] + p[\lambda_1] = 0$ . La courbe  $\mu_1$  borde également un disque  $D_1$  (dans le premier tore solide). Donc  $[\mu_1] = 0$ . Donc  $x = \lambda_1$  représente un élément de  $p$ -torsion, comme le confirme le théorème de Seifert-Van Kampen (appliqué à deux tores solides dont l'intersection est un tore surface). C'est donc un générateur de  $H_1(L(p, q))$ . Nous avons donc  $p x = -q \partial D_1$ . En prenant une copie  $x'$  parallèle à  $x$ , nous déduisons que  $\ell(x, x) = \frac{-q D_1 \cdot x'}{p} = \frac{\pm q}{p} \pmod{1}$ . Reste à déterminer le signe. Dans le recollement  $L(p, q) = H_1 \cup_h (-H_1)$  où  $H_1$  désigne un tore solide, le second tore solide a l'orientation opposé (et  $h$  préserve l'orientation). On en déduit que  $D_1 \cdot x' = -1$ . D'où le résultat. ■

4.6) On sait que  $S^3$  se plonge dans  $\mathbb{R}^4$  : il suffit de voir  $S^3$  comme la sphère unité de  $\mathbb{R}^4$ . Pour l'autre direction, il suffit de voir que l'enlacement  $e$  d'un lenticulaire n'est jamais hyperbolique. Par l'absurde : si  $e$  est hyperbolique, il y a deux sous-groupes  $A, B \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  tel que  $A = A^\perp$ ,  $B = B^\perp$  et  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = A \oplus B$ . Comme  $A$  et  $B$  sont des groupes d'un groupe cyclique,  $A$  et  $B$  sont eux-mêmes cycliques et d'après la question 1.5),  $A \simeq B$ . Donc  $A$  et  $B$  sont deux groupes cycliques de même ordre  $n$ . Donc  $p = n \cdot n = n^2$ . Donc  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ , donc  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  possède un élément d'ordre  $n^2$ , ce qui est absurde. ■