Séries de Fourier — CONVERGENCE PONCTUELLE

Théorème 1 :

Soit $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ T-périodique, $\ell \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{tikzcd}
{[0,T]} \arrow[r] & \mathbb{R} \\
\mathbb{R} \arrow[u, phantom, "\subset" description] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| \frac{f(x_0-t)-\ell}{t} \right| dt < +\infty$$

alors la série de Fourier de f converge en x_0 et :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{in\omega x_0} = \ell.$$

Preuve :

① $f \in L^1_p([0,T])$: $\displaystyle |f(x_0-t)-\ell| \leq \frac{T}{2} \cdot \underbrace{\left| \frac{f(x_0-t)-\ell}{t} \right|}_{\text{intégrable sur } [-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}$ pour $|t| \leq \frac{T}{2}$.

- Donc $\hat{f}(n)$ est défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

② On a vu, avec le noyau de Dirichlet : $\displaystyle D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e_k(x)$, $\quad e_k(t) = e^{ik\omega t}$.

- $\displaystyle D_N(x) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\omega x\right)}{\sin \omega\frac{x}{2}}$

- $\langle D_N, e_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } -N \leq k \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- $D_N * e_k(x) = \langle D_N, e_k \rangle e_k(x) = \begin{cases} e_k(x) & \text{si } |k| \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- $\displaystyle D_N * f(x) = f * D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} f * e_k(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e_k(x)$

$$= S_N f(x)$$

N^e somme partielle de f.

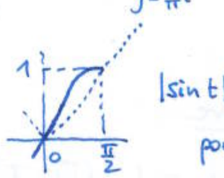
- $\displaystyle \langle D_N, e_0 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T D_N(t)\,dt = 1$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

$= 1 * D_N$ (fonction constante)

2 Nous avons :

- $(S_N f)(x_0) = D_N * f(x_0) = \cancel{\ldots}\, f * D_N(x_0)$
- $\ell = \ell . 1 = \ell * D_N$

Donc
$$\begin{aligned} S_N f(x_0) - \ell &= (f * D_N)(x_0) - \ell * D_N \\ &= (f-\ell) * D_N(x_0) \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(f(x_0-t)-\ell\right) D_N(t)\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{f(x_0-t)-\ell}{\sin\frac{\omega t}{2}} \sin\left(\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\omega t\right) dt \end{aligned}$$



$|\sin t| > \frac{2}{\pi} t$ pour $0 \leq |t| \leq \frac{\pi}{2}$

Or $\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right| \geqslant \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega t}{2} = \frac{2t}{T}$ pour $0 \leqslant \left|\frac{\omega t}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$

i.e.: $0 \leqslant |t| \leqslant \frac{T}{2}$.

$$\cancel{\text{Donc } \left|S_N f(x_0) - \ell\right| \leq \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|\frac{f(x_0-t)-\ell}{\sin\frac{\omega t}{2}}\right| \left|\sin\left(\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\omega t\right)\right| dt}$$

$$\cancel{\leq \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} T\cdot \frac{|f(x_0-t)-\ell|}{2t} \left|\sin\left(\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\omega t\right)\right| dt}$$

Donc $\overbrace{\left|\frac{f(x_0-t)-\ell}{\sin\frac{\omega t}{2}}\right|}^{g(t)}$ est intégrable (en t) sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Il résulte alors du <u>lemme de Riemann-Lebesgue</u> que : $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t\right) dt \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$

Ainsi $S_N f(x_0) - \ell \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$

<u>Rappel</u> : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ <u>et</u> $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n}$ convergent.

<u>Rappel 2</u> : Supposons que $\overline{c_n} = c_{-n}$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) $\sum_{\mathbb{N}} c_n$ CV

(2) $\sum_{\mathbb{N}} c_{-n}$ CV

(3) $c_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (c_n + c_{-n})$ CV

$c_0 + \sum_{\mathbb{N}} (c_n - c_{-n})$ CV

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Evident

(1) $\Rightarrow$ (3)

(3) $\Leftrightarrow$ (1) : $\sum_{n\geq 1}^{N} (c_n + \overline{c_n}) = \sum_{n=1}^{N} 2\mathrm{Re}(c_n)$ CV

$\sum_{n\geq 1} (c_n - \overline{c_n}) = i \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Im}(c_n)$ CV

A priori : $S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e_k(x) = \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{N} \hat{f}(k) e_k(x) + \sum_{k=1}^{N} \hat{f}(-k) e_{-k}(x)$

$$= \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{N} \hat{f}(k) e_k(x) + \sum_{k=1}^{N} \overline{f(k) e_k(x)} .$$

Il faudrait donc encore voir que $\sum_{k=1}^{N} \hat{f}(k) e_k(x) - \sum_{k=1}^{N} \overline{f(k) e_k(x)}$ CV en x_0 qd $N \to +\infty$.

Modifier D_N en $D_{-M,N}(t) = \sum_{k=-M}^{N} e_k(t)$

<u>démonstration identique</u> : $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} D_{-M,N}(t)\, dt = 1$, $\quad D_{-M,N}(t) = \frac{e^{-iMt} - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}}$

$g(t) = \frac{f(x_0 - t) - \ell}{1 - e^{it}}$ .... faire $M \to +\infty$ et $N \to +\infty$ <u>séparément</u>.

<u>Corollaires</u> :

<u>Corollaire 1</u> :

Si f est 2π-périodique intégrable sur $[0,T]$ et si $\exists\, \delta > 0$ tel que $\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0 - t) - \ell}{t} \right| dt <$
alors la série de Fourier de f converge au pt x_0 vers ℓ.

<u>Corollaire 2</u>

Si f est 2π-périodique intégrale et <u>dérivable</u> au pt x_0 alors $f(x_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ik\omega x_0}$.

<u>Corollaire 3</u> :

Si $f \in L^1_p([0,T])$ et si $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ reste <u>borné</u> au voisinage de x_0
alors $f(x_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ik\omega x_0}$.

<u>Corollaire 4</u> :

Si $f \in L^1_p([0,T])$ et si f est lipschitzienne, alors $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ik\omega x}$.

<u>Preuve des corollaires</u> :

① $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| \frac{f(x_0 - t) - \ell}{t} \right| dt \leq \frac{1}{\delta} \underbrace{\int_{\delta < |t| < \frac{T}{2}} |f(x_0 - t) - \ell|\, dt}_{\substack{< \infty \\ (f \text{ intégrable})}} + \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0 - t) - \ell}{t} \right| dt}_{\substack{< \infty \\ (\text{hyp.})}}$

Donc on peut appliquer le théorème.

3 $\Rightarrow$ 2

Montrons 3 : soit $\ell = f(x_0)$

$$\left|\frac{f(x_0-t)-\ell}{t}\right| = \left|\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t}\right| \leq M \quad \text{pour } |t|\leq\delta$$

Donc $\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x_0-t)-\ell}{t}\right|dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} M\,dt = 2M\delta < +\infty$ et on applique 1. ■

Montrons 4 : f lipschitzienne $\Rightarrow x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est borné pour $x\neq x_0$

On applique alors 3. ■

Corollaire 5 :

$f\in L^1_p([0,T])$, $\ell\in\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$

Si $\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}}\left|\frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)}{2}-\ell\right|\frac{dt}{t}<\infty$ alors $(S_N f)(x_0)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\ell$.

(En particulier : si $\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}}\left|\frac{f(x_0-t)-\ell_-}{t}\right|dt<\infty$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}}\left|\frac{f(x_0+t)-\ell_+}{t}\right|dt<\infty$

alors $(S_N f)(x_0)\xrightarrow[N\to+\infty]{}(\ell_++\ell_-)/2$

Corollaire 6 :

$f\in C^1_{pm}([0,T])$

$0=a_0<a_1<\dots<a_N=T$

$f|_{]a_i;a_{i+1}[}$ est C^1 et se prolonge par continuité en une fct C^1 sur $[a_i,a_{i+1}]$.

Alors $(S_N f)(x_0)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\dfrac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$

Preuve du corollaire 5 : soit $F(t)=\dfrac{f(x_0-t)+f(x_0+t)}{2}$ 2π- périodique paire

De plus elle vérifie l'hypothèse du théorème 1 au point 0 :

$$\int_{-T/2}^{T/2}\left|\frac{F(0-t)-\ell}{t}\right|dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left|\frac{\frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)}{2}-\ell}{t}\right|dt<+\infty$$

donc la série de Fourier de F au pt 0 converge vers ℓ. Or :

$$2\hat{F}(k)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}2F(t)e^{-i\omega kt}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x_0-t)e^{-i\omega kt}dt+\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x_0+t)e^{-i\omega kt}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(u)e^{+i\omega k(u-x_0)}du+\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(u)e^{-i\omega k(u-x_0)}du$$

$$=\hat{f}(-k)e^{-i\omega kx_0}+\hat{f}(k)e^{i\omega kx_0}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} 2\hat{F}(k) e^{-i\omega k\cdot 0} = 2\sum_{k=-N}^{N}\hat{F}(k) = \sum_{k=-N}^{N}\left(\hat{f}(-k)e^{-i\omega k x_0} + \hat{f}(k)e^{-i\omega k x_0}\right).$

$$= 2\, S_N f(x_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 2\ell. \quad \blacksquare$$

Pour le cas particulier : $\ell = \dfrac{\ell_+ + \ell_-}{2}$. $\blacksquare$

<u>Preuve du corollaire 6:</u>

Par hypothèse, le rapport $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est <u>borné</u> au voisinage de x_0 pour $x \neq x_0$. (puisqu'il existe une limite à gauche et à droite). le cas particulier du corollaire 5 est vérifié avec $\ell_- = \lim_{t\to 0^+} f(x_0 - t)$, $\ell_+ = \lim_{t\to 0^+} f(x_0+t)$.

La notion de convergence de la série de Fourier dans les corollaires 5 et 6 est <u>plus faible</u> que celle du théorème 1 et des corollaires 1 à 4 :

$(S_N f)(x_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} L$ n'implique pas que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{i\omega k x_0}$ converge

(voir rappel)

(il se peut a priori que $\sum_{k=1}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{-i\omega k x_0}$ diverge par exemple).

$(S_N f)(x_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} L$ dit seulement que la série "symétrisée" $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\hat{f}(k) e^{i\omega k x_0} + \hat{f}(-k) e^{-i\omega k x_0}\right)$

converge.

<u>Morale</u> : faire attention en quel point x_0 on est intéressé à considérer la série de Fourier.