Licence MPC L3 – Mathématiques
Applications de la transformée de Laplace

1. Equations différentielles linéaires

Considérons l'équation différentielle avec conditions initiales suivante :

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -7 \end{cases}$$

Appliquons la transformée $\mathcal{L}$ de Laplace à cette équation :

$$\mathcal{L}y = \mathcal{L}y,$$

puis

$$\mathcal{L}y' = p\mathcal{L}y - y(0) = p\mathcal{L}y - 3,$$

puis

$$\mathcal{L}y'' = p^2\mathcal{L}y - y'(0) - py(0) = p^2\mathcal{L}y - 3p + 7.$$

Par linéarité de $\mathcal{L}$, on en déduit

$$6\mathcal{L}y + 5p\mathcal{L}y - 15 + p^2\mathcal{L}y - 3p + 7 = 0,$$

soit

$$(6 + 5p + p^2)\mathcal{L}y - 3p - 8 = 0,$$

$$\mathcal{L}y = \frac{8 + 3p}{6 + 5p + p^2}.$$

Pour retrouver y à partir de $\mathcal{L}y$, on décompose $\mathcal{L}y$ en éléments simples :

$$\mathcal{L}y = \frac{2}{p+2} + \frac{1}{p+3}.$$

Par conséquent,

$$y = 2e^{-2t} + e^{-3t}.$$

2. Système d'équations différentielles linéaires : trajectoire d'une particule dans un champ électromagnétique

On considère un champ électromagnétique composé de $\vec{E} = E_0\vec{k}$ et de $\vec{B} = B_0\vec{\jmath}$ dans un espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Ici E_0 et B_0 sont des constantes. Supposons qu'à l'instant $t = 0$, une particule de masse m et de charge q se trouve à l'origine O, au repos. On demande de déterminer la trajectoire $M(t)$ en fonction du temps. En négligeant le poids de la particule devant la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ (où $\vec{v} = \frac{dM}{dt}$ est la vitesse de la particule), le problème est modélisé par le système suivant :

$$\begin{cases} m\frac{d^2M}{dt^2} = q(\vec{E} + \frac{dM}{dt} \wedge \vec{B}) \\ \frac{dM}{dt}(0) = 0 \\ M(0) = 0. \end{cases}$$

En notant $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le vecteur composantes de $M(t)$, on obtient le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} mx'' & = & -qB_0z' \\ my'' & = & 0 \\ mz'' & = & qB_0x' + qE_0 \end{array} \right.$$

De la deuxième équation, vu les conditions initiales impliquent $y(0) = y'(0) = 0$, on déduit que $y(t) = 0$ pour tout t. Le mouvement de la particule a donc lieu dans le plan $x0z$.

Le problème se réduit donc au système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} mx'' & + & qB_0z' & = & 0 \\ mz'' & - & qB_0x' & = & qE_0 \end{array} \right.$$

En appliquant la transformée de la Laplace, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} mp^2\mathcal{L}x & + & qB_0p\mathcal{L}z & = & 0 \\ -qB_0p\mathcal{L}x & + & mp^2\mathcal{L}z & = & \frac{qE_0}{p}. \end{array} \right.$$

(Se souvenir que $\mathcal{L}1 = \frac{1}{p}$.) C'est un système linéaire. En posant $\omega = \frac{qB_0}{m}$ et $\alpha = -\frac{qE_0}{m}$, on trouve les solutions

$$\mathcal{L}x = \frac{\alpha\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}, \ \mathcal{L}z = \frac{-\alpha}{p(p^2+\omega^2)}.$$

Décomposons en éléments simples

$$\mathcal{L}x = \frac{\alpha}{\omega^2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+\omega^2}\right), \quad \mathcal{L}z = -\frac{\alpha}{\omega^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+\omega^2}\right).$$

On en déduit

$$x(t) = \frac{\alpha}{\omega^2}(\omega t - \sin(\omega t)), \quad z(t) = -\frac{\alpha}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t)).$$

L'image de la trajectoire $M(t)$ de la particule est une cycloïde dont les points de rebroussement se situent sur le demi axe $0x = \{(x,0,0) \mid x \geq 0\}$ aux points $x = 0, \frac{2\pi}{\omega}, \frac{4\pi}{\omega}, \cdots$.