<u>Exercice 1</u> : Soit $f \in \mathcal{C}_p([0,T])$ et $g \in \mathcal{C}([0,T])$. Montrer que $f*g \in \mathcal{C}_p([0,T])$ (i.e. : la convolution d'une fonction continue T-périodique et d'une fonction continue est une fonction continue T-périodique.)

<u>Exercice 2</u> : Soient $f, g \in \mathcal{C}_p([0,T])$. Soit $h \in \mathcal{C}_p([0,T])$ tel que $h(t) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $t \in [0,T]$, et $\frac{1}{T}\int_0^T |h(t)|\,dt = 1$. Montrer que si $\sup_{t\in[0,T]} |f(t) - g(t)| \leqslant \delta$ alors $\sup_{t\in[0,T]} |f*h(t) - g*h(t)| \leqslant \delta$.

<u>Exercice 3</u> : Soit $f \in \mathcal{C}_p([0,T])$. On suppose que pour tout $g \in \mathcal{C}_p([0,T])$, $f*g = 0$. Montrer que $f = 0$. (Choisir g de manière appropriée et appliquer un résultat du cours).

<u>Exercice 4</u> : Soit $f \in \mathcal{C}^1_p([0,T])$. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que $f*g = C$ (fonction constante égale à C) pour tout $g \in \mathcal{C}_p([0,T])$. Montrer que $f = 0$ et $C = 0$.

<u>Exercice 5</u> : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = \dfrac{n}{1+n^2t^2}$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+\setminus\{0\} =]0,+\infty[$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[a,+\infty[$ où $a>0$, mais ne converge pas uniformément vers 0 sur $]0,+\infty[$. En déduire que $\int_a^{+\infty} u_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $a > 0$.

<u>Exercice 6</u> : Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,dt = 1$.
On définit $u_n(t) = n \cdot u(n \cdot t)$, $t \in \mathbb{R}$. Montrer que : (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(t)\,dt = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$.
(2) $\forall \delta > 0$, $\int_{|\delta|<t} u_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. (3) Pour tout $f \in \mathcal{C}_p([0,T])$, la suite $u_n * f$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ (Indication : utiliser l'exercice 1 et imiter la démonstration du théorème analogue du cours.)

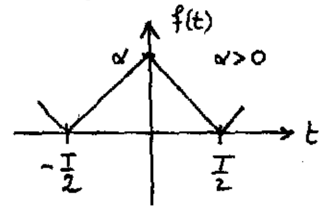
<u>Exercice 7</u> : 1) Soit $u(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$. Montrer que u vérifie les propriétés de l'exercice 6. 2) Même question avec la fonction $u(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$. Expliquer comment l'exercice 5 a été construit.

<u>Exercice 8</u> : Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par $f_\alpha(t) = e^{\alpha t}$ pour $0 \leqslant t < 2\pi$ (et prolongée par périodicité), où $\alpha \in \mathbb{C}\setminus i\mathbb{Z}$.

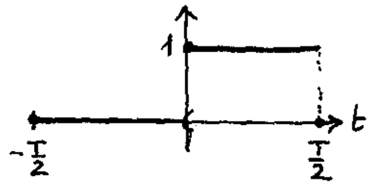
<u>Exercice 9</u> : Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = 1$ si $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, $f(t) = 0$ si $\frac{\pi}{2} < |t| \leqslant \pi$ (et prolongée par périodicité). Etudier la convergence de la série de Fourier associée.

<u>Exercice 10</u> : Soit f la fonction définie par $f(t) = |\sin \omega t|$, $t \in \mathbb{R}$ (où $\omega > 0$ est fixé). 1) Trouver la période de f et esquisser le graphe de f pour $\omega = 1$. 2) Calculer les coefficients de Fourier de f. 3) Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. 4) Montrer que f est C^1 par morceaux. 5) Soit $I = \{t \in \mathbb{R} \mid f \text{ est dérivable en } t\}$. Peut-on prolonger f' : $I \to \mathbb{R}$ en une fonction

continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Trouver un prolongement $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de $f' : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie : (i) g est périodique ; (ii) la série de Fourier de g converge simplement vers g sur $\mathbb{R}$. La convergence peut-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$? Expliquer.



Exercice 11: Soit f la fonction T-périodique représentée par son graphe. Calculer les coefficients de Fourier de f et étudier la convergence de la série de Fourier de f.



Exercice 12: Soit f la fonction T-périodique représentée par son graphe. Calculer les coefficients de Fourier de f et étudier la convergence de la série de Fourier de f.

Exercice 13: Montrer qu'il n'existe aucune fonction T-périodique continue $e : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $f * e = f$ pour tout $f \in \mathcal{C}_p([0,T])$. Indication : utiliser les exponentielles complexes périodiques e_k, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 14: Peut-on déduire de l'exercice 11 le résultat de l'exercice 12 ? Réciproquement ?

Exercice 15: (équation de la chaleur) On considère une barre homogène de longueur $L > 0$ dont les deux extrémités sont maintenues à température 0. Soit $f(x,t)$ la fonction représentant la température au point x et à l'instant t. Montrer (ou admettre) que f vérifie l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa_0 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad (\text{où } \kappa_0 \text{ est une constante } > 0),$$

avec condition initiale $f(x,0) = g(x)$, $\forall x \in [0,L]$ où g est une fonction initiale de répartition ; avec les conditions aux bords : $f(0,t) = f(L,t) = 0$. 1) Supposons qu'il existe une solution non identiquement nulle satisfaisant les conditions aux bords qui soit de la forme $f(x,t) = h(x) \cdot \tau(t)$. Vérifier qu'il existe alors une constante α telle que $\frac{\partial \tau}{\partial t}(t) = \alpha \cdot \kappa_0 \cdot \tau(t)$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x) = \alpha \cdot h(x)$. Démontrer que $\alpha < 0$. 2) On pose alors $\alpha = -\lambda$, avec $\lambda > 0$. Etablir que $\tau(t) = A e^{-\lambda \kappa t}$ et $h(x) = B \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + C \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ pour des constantes A, B, C. 3) Utiliser la condition aux bords pour montrer que $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{N}$. 4) Calculer dans ce cas la valeur initiale $f(x,0)$. 5) On s'intéresse toujours aux solutions de la forme de la question 1), mais on demande en plus qu'elles vérifient la conditions initiale $f(x,0) = g(x)$, $\forall x \in [0,L]$, où g est une fonction de classe C^1 nulle en 0 et en L. Montrer que la solution générale (de la forme de la question 1) est donnée par

$$f(x,t) = \sum_{n \geq 1} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\kappa_0 t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

où $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$. (Indication : prolonger g en une fonction périodique et utiliser la théorie de Fourier.)