L3 MPC 2011-2012 1er Semestre ANALYSE TRANSFORMATION DE LAPLACE

Exercice 1 : Calculer $\mathcal{L}(t^n e^{at})$ et préciser le domaine de définition. $(n \geqslant 0,\ a \in \mathbb{R})$

Exercice 2 : Calculer $\mathcal{L}(e^{at}\cos bt)$ et $\mathcal{L}(e^{at}\sin bt)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Calculer $\mathcal{L}(\cos^2 t)$ et $\mathcal{L}(\sin^2 t)$.

Exercice 4 : Calculer $\mathcal{L}(\cos^2 3t)$.

Exercice 5 : Trouver f_i connaissant sa transformée $F_i = \mathcal{L}(f_i)$:

$$F_1(p) = \frac{4}{p^2+25}\ ;\ F_2(p) = \frac{4}{(p-8)^5}\ ;\ F_3(p) = \frac{3p-5}{(p-4)^2+3}\ ;\ F_4(p) = \frac{p+3}{p^2+2p+10}.$$

Exercice 6 : Même exercice avec

$$F_1(p) = \frac{1}{p^2(p^2+9)}\ ;\ F_2(p) = \frac{(p-2)^2}{p(p^2+4)}\ ;\ F_3(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$$

Exercice 7 : Même exercice avec

$$F_1(p) = \frac{3}{p^2-1}\ ;\ F_2(p) = \frac{3p}{(p-2)^3}\ ;\ F_3(p) = \frac{3p^2+6p+1}{p^5+2p^4-p^3-2p^2}\ ;\ F_4(p) = \frac{p^4+1}{p^5-p}\ ;\ F_5(p) = \frac{p^4+1}{p^6}\ ;$$

$$F_7(p) = \frac{1}{p^3+1}\ ;\ F_8(p) = \frac{p^2+2}{p^2(p^2+1)^2}.$$

Exercice 8 : 1. Calculer $\mathcal{L}(te^{iat})$ $(a \in \mathbb{R})$ et en déduire $\mathcal{L}(t\cos(at))$ et $\mathcal{L}(t\sin(at))$.

2. Soit $f(t) = \frac{\sin(at)}{2a^3} - \frac{t\cos(at)}{2a^2}$. Vérifier que $F(p) = \frac{1}{(p^2+a^2)^2}$ $(F = \mathcal{L}(f))$.

3. Trouver f_1 sachant que $F_1(p) = \frac{p^2+2}{p^2(p^2+1)^2}$ $(F_1 = \mathcal{L}(f_1))$.

Exercice 9* : Soit $f(t) = \frac{\sin t}{t}$; on note $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer $\mathcal{L}(u(t)f(t))$.

Exercice 10** : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^n telle que $\mathcal{L}(f^{(k)})$ existe pour $0 \leqslant k \leqslant n$.
Trouver des constantes $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ telles que $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \dots + \frac{c_n}{p^n} + \frac{1}{p^n}\varepsilon\left(\frac{1}{p}\right)$, $(p \to +\infty)$ où $\varepsilon(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$. Un tel développement existe-t-il si f n'est pas supposée de classe C^n (mais l'on suppose seulement l'existence de $\mathcal{L}(f)$) ?