Université Paul Sabatier – Toulouse III L3 MPC - Année 2011-2012

Corrigé du Partiel de Mathématiques (Analyse)

Mercredi 9 novembre

Durée : 2h

Exercice 1

1. On applique $\mathscr{L}$ à l'équation différentielle : on trouve

$$\mathscr{L}(y'') - \mathscr{L}y = s^2\mathscr{L}y - sy(0) - y'(0) - \mathscr{L}y = 4\mathscr{L}(\sin t) = \frac{4}{s^2+1},$$

soit

$$(s^2-1)\mathscr{L}(y) - 8 = \frac{4}{s^2+1}.$$

On en déduit que

$$\mathscr{L}(y)(s) = \frac{8s^2+12}{(s^2+1)(s^2-1)}.$$

En décomposant en éléments simples, on trouve

$$\mathscr{L}(y)(s) = -\frac{2}{s^2+1} + \frac{5}{s-1} - \frac{5}{s+1}.$$

On en déduit

$$y(t) = 5(e^t - e^{-t}) - 2\sin(t) = 10\sinh(t) - 2\sin(t).$$

2. Première méthode : vu que $y(0) = 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)}{t} = y'(0) = 10(\sinh(t))'(0) - 2(\sin(t))'(0) = 10\cosh(0) - 2\cos(0) = 10 - 2 = 8.$$

Deuxième méthode : vu que $e^t = 1 + t + t\varepsilon(t)$ et que $\sin(t) = t + t\varepsilon(t)$ pour t au voisinage de 0, on en déduit

$$y(t) = 5(1 + t - (1-t) + t\varepsilon(t)) - 2(t + t\varepsilon(t)) = (10-2)t + t\varepsilon(t) = 8t + t\varepsilon(t)$$

avec $\varepsilon(t) \to 0$ pour $t \to 0$. D'où le résultat voulu. Dans les deux cas, on observe l'accord avec la condition initiale $y'(0) = 8$.

Exercice 2

On applique $\mathscr{L}$ au système différentiel. On obtient le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (s+1)\mathscr{L}(x) - 2\mathscr{L}(y) & = & 1 \\ \mathscr{L}(x) + (s+4)\mathscr{L}(y) & = & 1 \end{array} \right.$$

Ce système se résout (par la méthode de Cramer ou tout autre méthode) en

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(x)(s) & = & \dfrac{s+6}{(s+2)(s+3)} \\ \mathscr{L}(y)(s) & = & \dfrac{s}{(s+2)(s+3)} \end{array}\right.$$

En décomposant en éléments simples, on trouve

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(x)(s) & = & \dfrac{4}{s+2} - \dfrac{3}{s+3} \\ \mathscr{L}(y)(s) & = & \dfrac{-2}{s+2} + \dfrac{3}{s+3} \end{array}\right.$$

On en déduit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 4e^{-2t} - 3e^{-3t} \\ y(t) & = & -2e^{-2t} + 3e^{-3t}. \end{array}\right.$$

Exercice 3

Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$.

1. En développant sin à l'ordre 1, on voit que f se prolonge par continuité en 0 par sa limite qui est 1. Pour montrer que la fonction obtenue ainsi g est de classe C^1, il suffit de voir qu'elle est de classe C^1 en 0 (car f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{0\}$ comme rapport de deux fonctions C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas).

Or $\frac{g(t)-g(0)}{t} = \frac{\sin(t)/t-1}{t} = \frac{\sin(t)-t}{t^2} = -\frac{t}{6} + t\varepsilon(t)$ en développant sin à l'ordre 3. Par conséquent g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

La dérivée de g en-dehors de 0 est $g'(t) = f'(t) = \dfrac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2}$. En développant à l'ordre 3, on trouve $g'(t) = \dfrac{t(1 - t^2/2 + t^3\varepsilon(t)) - (t + t^3/6 + t^3\varepsilon(t))}{t^2} = -\dfrac{t}{6} + t\varepsilon(t)$. Donc $\lim_{t\to 0} g'(t) = 0 = g'(0)$. Donc g' est continue en 0, ce qu'il fallait démontrer.

2. Nous avons $-(\mathscr{L}g)'(s) = \mathscr{L}(t \cdot g(t))(s) = \mathscr{L}(\sin(t))(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Nous en déduisons que $(\mathscr{L}g)(s) = -\displaystyle\int_\infty^s \frac{dp}{p^2+1}$. La borne $+\infty$ est choisie puisque toute transformée de Laplace tend vers 0 en $+\infty$, donc $\mathscr{L}g$ est l'unique primitive de $1/(s^2+1)$ qui s'annule en $+\infty$. On en déduit

$$\mathscr{L}g(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s), \quad s \geq 0.$$

Noter que $\mathscr{L}g(s) = \left\{\begin{array}{rl} \arctan(1/s) & \text{si } s > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } s = 0 \end{array}\right.$

3. $\mathscr{L}(e^{-nt}g(t)) = \mathscr{L}g(s+n) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s+n)$.