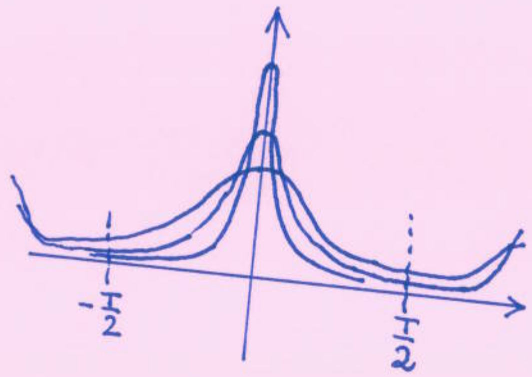
...égularisantes

...ne suite <u>régularisante</u> est une suite de fonctions continues T-périodiques positives telle que

(1) $\frac{1}{T}\int_0^T u_n(t)\,dt = 1$ pour tout $n \geq 1$.

(2) Pour tout $\delta > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \int_{\substack{|t|>\delta \\ t\in[0,T]}} u_n(t)\,dt = 0$



<u>Proposition</u> :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite <u>régularisante</u>, f continue sur $I = [0,T]$
T-périodique

Alors

$u_n * f$ converge uniformément sur I vers f

<u>Intérêt</u> : en choisissant convenablement la suite régularisante (on montre plus loin l'existence de telles suites), la suite $u_n * f$ obtenue par convolution aura de bonnes propriétés de régularité : par exemple, $u_n * f$ sera C^∞ si u_n est C^∞.

preuve de la proposition : Soit $\varepsilon > 0$.

$$(u_m * f)(t) - f(t) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u_m(s) f(t-s)\,ds - f(t).\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u_m(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u_m(s)\big(f(t-s) - f(t)\big)\,ds$$

On découpe $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$ en deux : $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta < |t| \leq \frac{T}{2}}$ pour tout $0 < \delta \leq \frac{T}{2}$ fixé.

Premier morceau : choisir $\delta > 0$ tel que $|f(t-s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $\delta \leq s \leq \delta$ (continuité uniforme de f sur $[0,T]$).

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} u_m(s)\big(f(t-s) - f(t)\big)\,ds \right|$$

$$\leq \int_{-\delta}^{\delta} u_m(s)\,|f(t-s) - f(t)|\,ds \qquad (u_m(s) \geq 0 \ \ \forall s)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} u_m(s)\,ds$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u_m(s)\,ds \qquad (u_n(s) \geq 0 \ \ \forall s)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deuxième morceau :

$$\left| \int_{\delta < |t| \leq \frac{T}{2}} u_m(s)\big(f(t-s) - f(t)\big)\,ds \right| \leq \int_{\delta < |t| \leq \frac{T}{2}} u_m(s)\,|f(t-s) - f(t)|\,ds$$

$$\leq \int_{\delta < |t| \leq \frac{T}{2}} u_m(s)\big(|f(t-s)| + |f(t)|\big)\,ds$$

$$\leq 2 \sup_{y \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]} |f(y)| \cdot \int_{\delta < |t| \leq \frac{T}{2}} u_m(s)\,ds$$

Par hypothèse (condition (2) de la définition de suite régularisante) :

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{\delta<|t|\leqslant\frac{T}{2}} u_m(s)ds = 0$$

Il existe donc $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall m\geqslant N$, $\left|\frac{1}{T}\int_{\delta<|t|\leqslant\frac{T}{2}} u_m(s)ds\right| = \frac{1}{T}\int_{\delta<|t|\leqslant\frac{T}{2}} u_m(s)\,ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$ (où $M = 2\sup_{y\in[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]} |f(y)|$).

Conclusion :

$$\left|(u_m * f)(t) - f(t)\right| = \frac{1}{T}\left|\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{T}\left|\int_{-\delta}^{\delta}\right| + \frac{1}{T}\left|\int_{\delta<|t|\leqslant\frac{T}{2}}\right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Cette inégalité est vraie pour tout t et ε est indépendant de t.

Donc : $\sup_{t\in[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]} \left|(u_m * f)(t) - f(t)\right| \leqslant \varepsilon$. ■

Existence de suites régularisantes : construction et exemples

1) $h_m(t) = \dfrac{\omega\cdot\cos^{2m}(\frac{\omega t}{2})}{\frac{1}{T}\int_0^T \omega\cos^{2m}(\frac{\omega t}{2})dt}$ est une suite régularisante :

- $h_m(t)\geqslant 0$ $\forall t\in\mathbb{R}$, h_m continue.
- $\frac{1}{T}\int_0^T h_m(t)\,dt = 1$ $\forall m\geqslant 1$.
- $\int_{\delta<|t|\leqslant T} = \int_{-\frac{T}{2}}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\frac{T}{2}}$

$$\int_\delta^{\frac{T}{2}} h_m(t)dt = \frac{\omega\int_\delta^{\frac{T}{2}}\cos^{2m}(\frac{\omega t}{2})dt}{\frac{1}{T}\int_0^T\omega\cos^{2m}\frac{\omega t}{2}dt} = \frac{\int_\delta^{\frac{T}{2}}\cos^{2m}(\frac{\omega t}{2})dt}{\frac{1}{T}\int_0^T\cos^{2m}(\frac{\omega t}{2})dt}$$

$t\mapsto\cos^{2m}(\frac{\omega t}{2})$ est intégrable et $\left|\cos^{2m}\frac{\omega t}{2}\right|\leqslant 1$ qui est intégrable

On peut appliquer le théorème de convergence dominée : $\lim_{m\to+\infty}\int_\delta^{\frac{T}{2}}\cos^{2m}(\frac{\omega t}{2})dt = \int_\delta^{\frac{T}{2}}\lim_{m\to+\infty}\cos^{2m}\frac{\omega t}{2}dt$

$= 0$

En fait : $\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{2n}\left(\frac{\omega t}{2}\right)}_{>0} dt \leq \left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\cos^{2n}\left(\frac{\omega\delta}{2}\right)$. $\qquad \cos\left(\frac{\omega\delta}{2}\right) < 1$

On montre que $\int_0^T \cos^{2n}\left(\frac{\omega t}{2}\right) dt \underset{\infty}{\sim} \frac{A}{\sqrt{n}}$ $(A>0)$. Donc $\dfrac{\int_\delta^{T/2} h_n(t)\,dt}{\int_0^T \cos^{2n}\left(\frac{\omega t}{2}\right)dt} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) <u>Noyau de Fejer</u> :

On rappelle le noyau de Dirichlet $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e_k(t) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right)}{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}$.

Le noyau de Fejer est défini par :

$$K_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(t)$$

La suite $K_n(t)$ est une suite <u>régularisante</u> :

- $\frac{1}{T}\int_0^T K_n(t)\,dt = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{T}\int_0^T D_0(t)\,dt + \dots + \frac{1}{T}\int_0^T D_{n-1}(t)\,dt\right)$
  $= \frac{1}{N}\times N = 1.$
- $K_n(t) = \frac{1}{n}\left(\dfrac{\sin\frac{n\omega t}{2}}{\sin\frac{\omega t}{2}}\right)^2 \geqslant 0$.
- $\int_{\delta<|t|\leqslant\frac{T}{2}} K_n(t)\,dt \leqslant \int_{\delta<|t|\leqslant\frac{T}{2}} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}}\,dt = \frac{1}{n}\int_{\delta<|t|\leqslant\frac{T}{2}} \frac{dt}{\sin\frac{\omega t}{2}}$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \quad \blacksquare$$

Propriétés :

$$(K_n * f)(t) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k * f\right)(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(D_k * f)(t)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k f(t)$$

C'est en particulier un polynôme trigonométique !

On a en particulier démontré :

Théorème :

Pour toute fonction continue T-périodique f, il existe une suite (P_n) de polynômes trigonométriques telle que P_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, i.e. $\|f - P_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} |f(t) - P_n(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - P_n(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(il suffit de prendre une suite régularisante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométiques, par exemple $u_n = K_n$, alors $u_n * f = P_n$ convient.)

Applications : Théorème (unicité)

Soit f continue, T-périodique. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\forall n \in \mathbb{Z}, \ \hat{f}(n) = 0$.

(2) $f = 0$

preuve : (2) $\Rightarrow$ (1) est évident.

Réciproquement : supposons $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Alors $\langle f, e_n \rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$

Donc $\langle f, P \rangle = 0$ pour tout polynôme trigonométique (combinaison linéaire de e_n)

Soit (P_n) une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers f.

Alors $\langle f, f - P_n \rangle = \langle f, f \rangle - \cancel{\langle f, P_n \rangle} = \langle f, f \rangle$

Donc : $0 \leq \langle f, f \rangle = \langle f, f - P_n \rangle \leq \|f\|_2 \cdot \|f - P_n\|_2 = \left[\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{T}\int_0^T |f - P_n(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$

$\leq \sup_{t\in[0,T]} |f(t)| \cdot \underbrace{\sup_{t\in[0,T]} |f(t) - P_n(t)|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

Donc $\langle f, f\rangle = 0$

Comme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est défini, $f = 0$. ∎

Corollaire.

Soit f continue, T-périodique. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\{\hat{f}(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ est à support fini

(2) f est un polynôme trigonométique.

<u>Remarque</u> : les deux résultats précédents restent vrais « à un ensemble de mesure nulle près » pour une fonction f représentant un élément de $L^2_p([0,T])$.

<u>Orthogonalité</u>

$\langle f, g\rangle = 0$ est une condition symétrique en f et g : f et g sont orthogonales.

<u>Propriétés familières</u> :

$A^\perp = \{g \mid \langle g, a\rangle \ \forall a \in A\}$

$A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp$

Pythagore : si $f \perp g$, alors $\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Proposition de la projection orthogonale

Soit $f \in L^2_p([0,T])$, $\quad \Delta_N f = f - S_N f$

1) $\langle S_N f, \Delta_N f\rangle = 0$

2) $S_N f$ est l'unique élément h de $\mathrm{Vect}(e_k, |k| \leqslant N)$ tel que $\|f - h\|_2 = \|\Delta_N f\|_2$

3) Pour tout $h \in \mathrm{Vect}(e_k, |k| \leqslant N) \setminus \{S_N f\}$, $\|h - f\|_2 > \|\Delta_N f\|_2$.

En d'autres termes : la fonction $\begin{array}{rcl}\mathrm{Vect}(e_k, |e_k| \leqslant N) & \to & \mathbb{R}_+ \\ h & \longmapsto & \|f - h\|_2\end{array}$ atteint un maximum absolu uniquement en $h = S_N f$.

démonstration

1) $\langle \Delta_N f, e_k \rangle = \langle f - S_N f, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle - \langle S_N f, e_k \rangle$
$$= \hat{f}(k) - \hat{f}(k)$$
$$= 0.$$

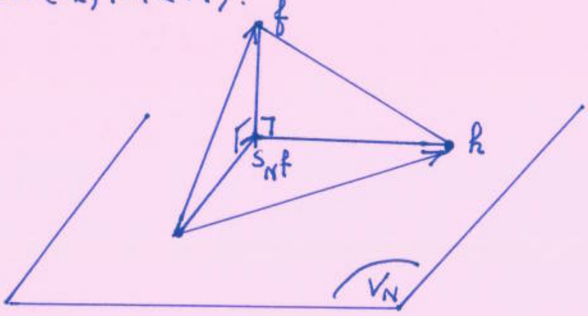
Par conséquent $\Delta_N f$ est orthogonal à tout e_k, $|k| \leq N$.

Donc $\underline{\Delta_N f \in \mathrm{Vect}(e_k, |k| \leq N)^{\perp}}$.

Or $S_N f \in \mathrm{Vect}(e_k, |k| \leq N)$. Par suite, $\langle S_N f, \Delta_N f \rangle = 0$.

2) et 3). Dessin

Soit $V_N = \mathrm{Vect}(e_k, |k| \leq N)$.



Soit $h \in V_N$. Alors $f - h = \underbrace{f - S_N f}_{\in V_N^{\perp}} + \underbrace{S_N f - h}_{\in V_N}$

Donc $\| f - h \|^2 = \langle f - h, f - h \rangle = \| \Delta_N f \|^2 + \| S_N f - h \|^2$ (Pythagore)

On en déduit aisément les propriétés désirées. ■

Le fait que $\Delta_N f = f - S_N f \in V_N^{\perp}$ dit exactement que $S_N f$ est la projection orthogonale de f sur le sous-espace V_N.

Le théorème de convergence en moyenne quadratique.

Théorème.

Soit f T-périodique intégrable.

(1) La série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \sum_{k\geq 1}\left(|\hat{f}(k)|^2+|\hat{f}(-k)|^2\right)+|\hat{f}(0)|^2$ est convergente vers $\|f\|_2^2$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt \qquad \text{(relation de Parseval)}$$

(2) La série de Fourier associée à f converge vers f en moyenne quadratique :

$$\|f - S_N f\|_2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

preuve :

(1) Nous avons $\|f\|^2 = \|\Delta_N f\|^2 + \|S_N f\|^2$ (la prop. précédente)

Donc $\|S_N f\|^2 \leqslant \|f\|^2$

Or $\|S_N f\|^2 = \sum_{|k|\leq N} |\hat{f}(k)|^2$ (orthogonalité des e_k).

Donc : $\sum_{|k|\leq N} |\hat{f}(k)|^2 \leqslant \|f\|^2$. (inégalité de Bessel), d'où $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \leqslant \|f\|^2$.

Montrons que cette inégalité est en fait une égalité : soit $\varepsilon>0$.

- Approchons f par une application φ continue, T-périodique de sorte que
$$\|f-\varphi\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}.$$
- Approchons φ par un polynôme trigonométrique $g\in \mathrm{Vect}(e_k, |k|\leqslant N)$ tel que
$$\|\varphi - g\|_\infty \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$$
A fortiori $\|\varphi-g\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$.

Alors $\|f-g\|_2 \leqslant \|f-\varphi\|_2 + \|\varphi-g\|_2 \leqslant \sqrt{\varepsilon}$

Mais $\|\Delta_N f\| = \|f-S_N f\| \leqslant \|f-g\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$

D'où $\|S_N f\|^2 = \|f\|^2 - \|\Delta_N f\|^2 \geqslant \|f\|^2 - \varepsilon$

Comme la suite $\|S_n f\|^2$ est <u>croissante</u> :

$$\forall n \geqslant N, \quad \|S_n f\|^2 \geqslant \|S_N f\|^2 = \|f\|^2 - \|\Delta_N f\|^2 \geqslant \|f\|^2 - \varepsilon .$$

Ainsi $\quad \|f\|^2 - \varepsilon \leqslant \|S_n f\|^2 \leqslant \|f\|^2$, puis $\|f\|^2 - \varepsilon \leqslant \|Sf\|^2 \leqslant \|f\|^2$.

On en déduit que $\quad \|Sf\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2$.

(2) $\forall n$: $\quad \|f\|^2 = \|\Delta_n f\|^2 + \|S_n f\|^2$

Puisque $\lim_{n \to +\infty} \|S_n f\|^2 = \|f\|^2$, on en déduit que $\|\Delta_n f\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. ■

<u>Remarque</u> :

Comme la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2$ converge, ses coefficients tendent vers 0.

$$\forall k, \quad |\hat{f}(k)| \longrightarrow 0$$

On retrouve le lemme de Riemann-Lebesgue.

<u>Exemple</u> :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si } t \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

On trouve : $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}$, $\quad \hat{f}(k) = \frac{1-(-1)^k}{2\pi i k}$ si $k \neq 0$.

La relation de Parseval s'écrit : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dt = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.