Licence EEA L3 – Mathématiques – Université Paul Sabatier 2011
Théorème de Parseval

L'objet de ces notes est de complémenter ce qui a été vu dans les cours précédents à propos de la relation de Parseval et de la convergence en moyenne quadratique des séries de Fourier.

1. L'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$

Considérons une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Rappelons qu'on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ converge si les *deux* séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n}$ convergent.

On note
$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \text{ converge}\}.$$

Lemme 1. *$\ell^2(\mathbb{Z})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*

Preuve. Soit $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Il est clair que tout multiple de u reste dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. Soit $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$ une autre suite. On montre que
$$\Big(\sum_{0\le n\le N} |u_n + v_n|^2\Big)^{1/2} \le \sum_{0\le n\le N} |u_n|^2 + \sum_{0\le n\le N} |v_n|^2.$$
Les termes de droite ayant une limite quand $N \to \infty$ puisque les séries sont convergentes et que les sommes partielles sont croissantes, on peut prendre la limite $N \to +\infty$ dans le membre de droite. Puis on en déduit la convergence de la série $\sum_{n\ge 0} |u_n + v_n|^2$. On déduit pareillement la convergence de la série $\sum_{n\le 0} |u_n + v_n|^2$. Le résultat s'ensuit. ∎

On définit un produit $\langle -, - \rangle : \ell^2(\mathbb{Z}) \times \ell^2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ par la formule
$$\langle u, v\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \overline{v_n}.$$
Cette formule définit bien une série convergente : en effet
$$\left|\sum_{0\le n\le N} u_n\overline{v_n}\right| \le \left(\sum_{0\le n\le N} |u_n|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{0\le n\le N} |v_n|^2\right)^{1/2}$$
pour tout N. On peut prendre la limite $N \to +\infty$ dans le membre de droite puisque les séries y sont convergentes et les sommes partielles croissantes. On en déduit la convergence de la série voulue.

Ce produit est linéaire par rapport à la première variable et antilinéaire (ou conjugué-linéaire) par rapport à la seconde : on dit que le produit est *sesquilinéaire*. En fait, il a une propriété supplémentaire (qui avec la linéarité de la première variable implique l'antilinéarité de la seconde) : il est "conjugué-symmétrique", à savoir
$$\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}, \text{pour tout } u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Un produit possédant ces trois propriétés est dit *hermitien*. Une propriété supplémentaire est que

$$\langle u, u\rangle \in \mathbb{R}_+ \text{ pour tout } u \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

On dit que le produit est *positif*. Enfin, ce produit vérifie une dernière propriété

$$\langle u, u\rangle = 0 \text{ si et seulement si } u = 0.$$

Seule la suite nulle $u = 0$ vérifie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 = 0$. (exercice. Indication : étudier le sens de variation de la suite des sommes partielles et utiliser une propriété des réels). On dit alors que le produit est *défini*[1]. Un produit hermitien défini positif est appelé un *produit scalaire hermitien*.

Le produit $\langle -, -\rangle$ hermitien défini positif induit une norme $||-||_2$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ par la formule

$$||c||_2^2 = \langle c, c\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \int_{\mathbb{Z}} |c(n)|^2 \, d\mu(n).$$

2. Une autre manière de voir $\ell^2(\mathbb{Z})$

Une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est autre qu'une application $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto c_n = c(n)$. L'ensemble $\mathbb{Z}$ possède une mesure μ qui est appelé la mesure du dénombrement, définie par $\mu(A) = \mathrm{Card(A)}$ pour toute partie A de $\mathbb{Z}$. Une application $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est μ-intégrable si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u(n)|$ est convergente (finie). On note

$$\int_{\mathbb{Z}} |u(k)| \, d\mu(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)|.$$

Une définition alternative de l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ est donc

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \text{ de carré intégrable.}\}.$$

3. Sur la relation de Parseval

Nous sommes en mesure d'énoncer le résultat principal.

Théorème 1. *L'application*

$$L^2_{\mathrm{p}}([0, T]) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \; f \mapsto \widehat{f}$$

est un isomorphisme isométrique.

L'application $f \mapsto \widehat{f}$ est linéaire. La norme sur $L^2_p([0, T])$ est la norme déjà introduite

$$||f||_2^2 = \int_{S_T} |f(t)|^2 \, d_T t = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt,$$

[1]Cela semble être un anglicisme : le mot anglais est *definite* qui n'a rien à voir avec la définition. Mais l'usage s'est déjà imposé. Définitivement.

où S_T désigne le cercle de longueur T et $d_T t$ la mesure induite sur le cercle par la mesure de Lebesgue habituelle[2] sur $\mathbb{R}$. La norme sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ est celle qui a été introduite au paragraphe précédent. Le fait que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ préserve les normes est une conséquence du théorème de Parseval : en effet, la relation de Parseval dit que

$$||f||_2^2 = \int_{S_T} |f(t)|^2 \; d_T t = \int_{\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 \; d\mu(n) = ||\widehat{f}||_2^2.$$

Une application linéaire préservant les normes est toujours injective : en effet, considérons le noyau de $f \mapsto \widehat{f}$: il est constitué des fonctions $f \in L^2_{\mathrm{p}}([0,T])$ telles que $\widehat{f} = 0$. Par conséquent $0 = ||\widehat{f}||_2 = ||f||_2$. Donc $f = 0$ aussi.

Remarque. L'inclusion suivante est vérifiée :

$$L^2_{\mathrm{p}}([0,T]) \subset L^1_{\mathrm{p}}([0,T]).$$

(En effet, une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\int_0^T |f(t)| \; dt = \int_0^T |f(t)| \cdot 1 \; dt \leq \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 \; dt} \cdot \sqrt{\int_0^T 1^2 \; dt} = ||f||_2 \cdot T < +\infty$$

d'où l'existence de $\int_0^T |f(t)| \; dt$ et la majoration

$$||f||_1 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| \; dt \leq ||f||_2.$$

L'injectivité n'est autre que l'observation (déjà démontrée) que pour $f \in L^1_p([0,T])$, $f = 0$ si et seulement si tous ses coefficients de Fourier sont nuls.

Nous admettons la surjectivité de l'application $f \mapsto \widehat{f}$.

4. Convolution

La convolution a déjà été définie dans le cadre des fonctions continues par morceaux périodiques. Soit maintenant f, g deux fonctions T-périodiques de carré intégrable. On définit

$$(f \star g)(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) g(t-x) \; dx.$$

Ceci définit une nouvelle fonction $f \star g$ elle-même T-périodique et de carré intégrable (exercice). Passant à l'espace $L^2_{\mathrm{p}}([0,T])$ (où les fonctions sont remplacées par des classes de fonctions où deux fonctions sont identifiées si elles diffèrent sur un ensemble de mesure nulle), on en déduit que la convolution est bien un produit sur $L^2_{\mathrm{p}}([0,T])$. On vérifie

Lemme 2. *Le produit $\star$ sur $L^2_{\mathrm{p}}([0,T])$ est bilinéaire, associatif et commutatif. De plus, pour tous $f, g \in L^2_{\mathrm{p}}([0,T])$,*

$$\widehat{f \star g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

[2]Si cela paraît trop formel, on peut toujours revenir à la définition première : $\int_{S_T} |f(t)|^2 \; d_T t = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} |f(t)|^2 dt$ où cette fois, f est vue comme fonction sur $[0,T]$ ou T-périodique sur $\mathbb{R}$.

Les deux premières affirmations sont laissées en exercices (théorème de Fubini et changement de variables en utilisant la périodicité). La dernière propriété se démontre en intervertissant les signes d'intégration (Fubini) puis en changeant de variable.

Cette dernière propriété est fondamentale : elle montre que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ transforme le produit de convolution en produit usuel de fonctions. Elle a aussi un intérêt pratique (cf. exercices) : il est plus aisé de calculer un produit usuel de fonctions discrètes qu'un produit de convolution.

En conclusion :

Théorème 2. *L'application* $f \mapsto \widehat{f}$ *est un isomorphisme isométrique entre les* algèbres $(L^2_{\mathrm{p}}([0,T]), \star)$ *et* $(\ell^2(\mathbb{Z}), \cdot)$.