Documents non autorisés

Examen - Licence EEA - Module 1 - Analyse

Exercice

On considère la fonction périodique f en dents de scie représentée sur la figure 1.

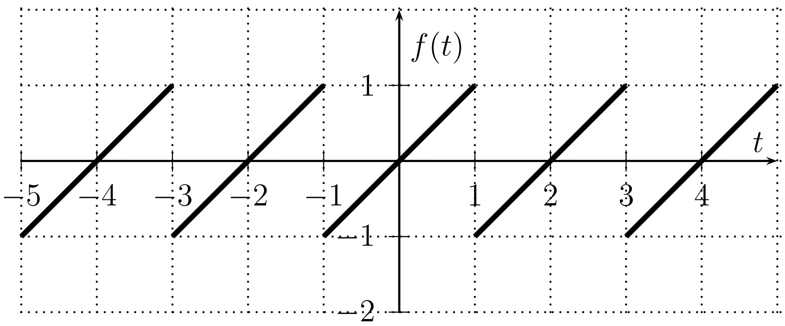


figure 1

Après avoir donné les raisons pour lesquelles la fonction f admet un développement en série de Fourier, calculer les coefficients a_n et b_n de la décomposition de la fonction f sous la forme :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\,n\,\pi\,\nu_0\,t) + b_n \sin(2\,n\,\pi\,\nu_0\,t)]$$

On explicitera les simplifications de calculs apportées par les propriétés de f, ainsi que les valeurs a_0 et ν_0. À quoi correspondent ces deux dernières valeurs ?

Problème

On veut étudier le filtre décrit par l'équation différentielle temporelle (1) :

$$g'' + 2\,\alpha\,\beta\,g' + \beta^2\,g = \beta^2\,f \qquad ; \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

f est l'entrée du filtre, g sa sortie, α et β sont deux paramètres. On note $\mathcal{L}$ la transformée de Laplace, p la variable correspondante, et on désigne par $F = \mathcal{L}f$ et $G = \mathcal{L}g$ les transformées de Laplace respectives de f et g, qu'on suppose exister pour $\mathcal{R}e(p)$ assez grand. Soit la fonction échelon :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

a– Calculer G en fonction de F en introduisant les conditions initiales nécessaires.

b– On supposera par la suite que $g(0) = g'(0) = 0$. Écrire la fonction de transfert $\dfrac{G(p)}{F(p)}$.

On veut chercher la réponse indicielle d'amplitude U ($f = U\,\varepsilon$) du filtre pour $\beta = 1$.

c– Donner la transformée de Laplace de la réponse indicielle.

d– Trouver la décomposition en éléments simples de cette transformée de Laplace dans le cas $\alpha = 2$. En déduire l'expression de g.

On pose maintenant $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

e– Effectuer la décomposition en éléments simples sous la forme : $\dfrac{A}{p} + \dfrac{B\,p + C}{p^2 + p + 1}$.

f– Quel est l'original h tel que :

$$\mathcal{L}(h) = \frac{p}{p^2 + p + 1} \qquad ?$$

En déduire l'expression de g.

g– On donne sur la figure 2 l'allure de g pour différentes valeurs de α. Interpréter ce paramètre α.

h– Retrouver par le théorème de la valeur finale, la valeur de g en $t = \infty$. À quelle condition cette valeur existe-t-elle ?

NB : *on rappelle l'original des deux fonctions suivantes* :

$$\frac{1}{p+a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a\,t}\,\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1 + \dfrac{2\,a}{b}\,p + \dfrac{p^2}{b^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{b}{\sqrt{1-a^2}}\,\sin\left(b\,\sqrt{1-a^2}\,t\right)\,e^{-a\,b\,t}\,\varepsilon(t)$$

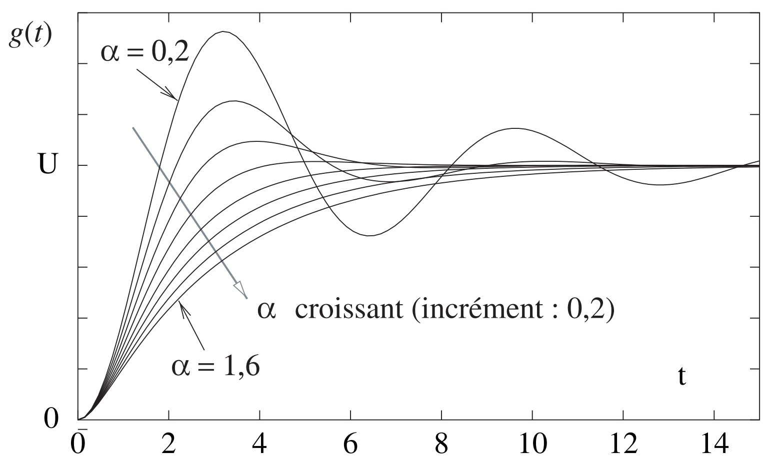


figure 2

Documents et calculatrices programmables non autorisés

Examen - Licence EEA - Module 1 - Analyse

NB : *on rappelle les définitions et résultats suivants* :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\,2\,\pi\,\nu\,t} \mathrm{d}t \\
\mathcal{L}(f)(p) &= \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-p\,t} \mathrm{d}t \\
\mathcal{L}(f')(p) &= p\,\mathcal{L}(f)(p) - f(0) \\
\lim_{t\to\infty} f(t) &= \lim_{p\to 0} p\,\mathcal{L}f(p) \\
\lim_{t\to 0^+} f(t) &= \lim_{p\to\infty} p\,\mathcal{L}f(p) \\
(u \star v)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\, v(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \\
\frac{1}{p+a} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a\,t}\,\varepsilon(t) \\
\frac{1}{1+\frac{2\,a}{b}\,p+\frac{p^2}{b^2}} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{b}{\sqrt{1-a^2}}\,\sin\left(b\,\sqrt{1-a^2}\,t\right)\, e^{-a\,b\,t}\,\varepsilon(t)
\end{aligned}
$$

Exercice

On considère la fonction porte f représentée sur la figure 1.

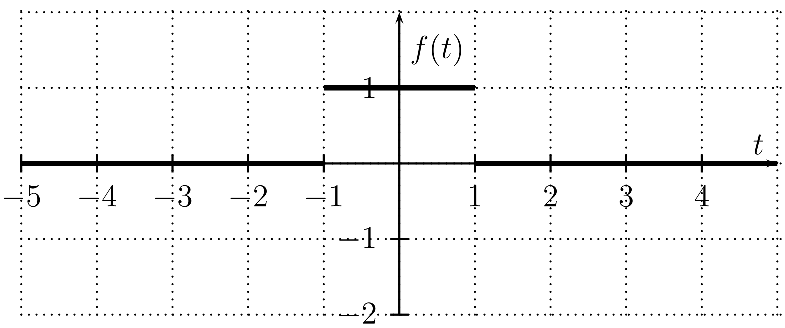


figure 1

On note $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier, ν la variable correspondante.

a– Calculer la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ de la fonction f.

b– Calculer et donner une représentation graphique du produit de convolution $f \star f$.

c– Quelle est la transformée de Fourier du produit de convolution?

Problème

On veut étudier le filtre décrit par l'équation différentielle temporelle (1) :

$$g'' + (\lambda - 1)\, g' + \lambda\, g = f \qquad ; \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1}$$

f est l'entrée du filtre, g sa sortie, λ est un paramètre. On nomme g_{λ_0} la solution de (1) correspondant à $\lambda = \lambda_0$. On note $\mathcal{L}$ la transformée de Laplace, p la variable correspondante, et on désigne par $F = \mathcal{L}f$ et $G = \mathcal{L}g$ les transformées de Laplace respectives de f et g, qu'on suppose exister pour $\mathcal{R}e(p)$ assez grand.

Soit la fonction échelon : $\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$

a– Calculer G en fonction de F en introduisant les conditions initiales nécessaires.

b– On supposera par la suite que $g(0) = g'(0) = 0$. Écrire la fonction de transfert $\frac{G(p)}{F(p)}$.

On cherche la réponse indicielle ($f = \varepsilon$) du filtre pour $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$.

c– Donner la transformée de Laplace de la réponse indicielle, en fonction de λ.

d– Trouver la décomposition en éléments simples de cette transformée de Laplace dans le cas $\lambda = 1$ puis dans le cas $\lambda = -1$. En déduire les expressions de g_1 et g_{-1}.

e– Appliquer les théorèmes de la valeur finale et de la valeur initiale afin de vérifier les expressions de g_1 et g_{-1}.

f– Quelle est, entre g_1 et g_{-1}, la seule physiquement viable : pourquoi ? Comment aurait-on pu obtenir cette même interprétation dès la question c– ?

Examen - Licence EEA - Module 1 - Analyse

Documents et calculatrices programmables interdits

NB : *on rappelle les définitions et résultats suivants* :

$$\mathcal{F}f(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\,2\,\pi\,\nu\,t} \mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}f(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-p\,t} \mathrm{d}t \ , \ p \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\,\mathcal{L}f(p) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}(t\,f)(p) = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}f(p)$$

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\sin a\, \sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b)$$

Le spectre de module d'une fonction f périodique de période T est la représentation du module de chaque coefficient complexe $c_n(f)$ de sa série de Fourier, en fonction de la fréquence $\frac{n}{T}$ de l'harmonique correspondant.

Exercice

Soit la fonction :

$$g(t) = \varepsilon(t)\, \sin t$$

a– Représenter graphiquement la fonction g sur l'intervalle $[-\pi; 4\,\pi]$.

b– Calculer la transformée de Laplace $\mathcal{L}g$ de g.

c– En déduire la transformée de Laplace de $\varepsilon(t)\,t\,\sin t$.

d– Après en avoir rappelé la définition, déterminer l'abscisse de sommabilité de g.

Problème

Soit la fonction :

$$g(t) = \sin(2\,\pi\,\nu_0\,t)\, \sin(2\,\pi\,\nu_1\,t) \qquad ; \qquad \nu_0 \ll \nu_1$$

a– Donner une représentation graphique de $g(t)$ sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ en prenant $\nu_0 = 1$ et $\nu_1 = 10$.

b– Décomposer $g(t)$ en somme de cosinus.

c– Donner les coefficients des séries de Fourier associées à chaque terme de la somme.

d– Tracer sur le même graphique les spectres associés aux séries de Fourier précédentes, pour $\nu \in [-20; 20]$ et en prenant $\nu_0 = 1$ et $\nu_1 = 10$. Pourquoi peut-on considérer que le spectre de g est la somme de ces spectres?

On observe maintenant la fonction g sur un intervalle nécessairement fini de largeur Δ centré sur $t = 0$. Cela revient donc à multiplier la fonction g par une fonction « porte » Π_Δ définie par :

$$\Pi_\Delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

e– Calculer la transformée de Fourier F_e de la fonction $\Pi_\Delta(t)\,\cos(2\,\pi\,\nu_i\,t)$. En déduire celle de $\Pi_\Delta(t)\,g$, appelée F, sous la forme de deux termes symétriques F_0 et F_1.

f– Tracer le spectre de $\Pi_\Delta(t)\,g$ (module de sa transformée de Fourier en fonction de la fréquence : $|F(\nu)|$) en prenant $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 10$ et $\Delta = \frac{1}{2}$. Par comparaison avec le spectre obtenu au d–, la fenêtre d'observation vous semble-t-elle suffisante pour g ?

g– On cherche à décomposer F_0 et F_1, chacune en deux composantes élémentaires suivant le modèle de la figure 1. Donner le triplé de valeurs ($\Delta\nu$, ν_c, A) pour chaque composante de F_0 et F_1. Peut-on raisonner sur une seule des deux composantes de F_0 ou F_1 sans perte de généralité ?

h– Afin de minimiser les interférences entre F_0 et F_1, et être capables de distinguer les deux sinusoïdes, on cherche à les positionner de la manière indiquée figure 2, c'est-à-dire à superposer l'extremum de l'une avec le premier zéro de l'autre. À partir des triplés ($\Delta\nu$, ν_c, A), donner l'expression de la largeur Δ de la fenêtre d'observation correspondante. Effectuer l'application numérique avec les valeurs trouvées au g–.

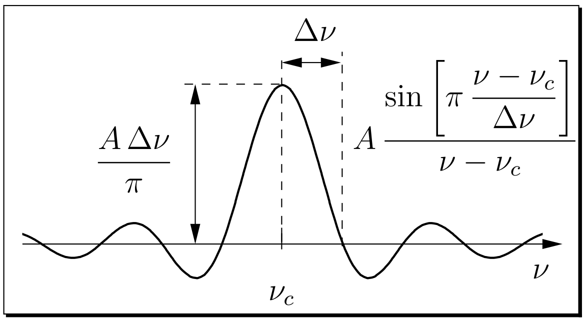


FIG. 1:

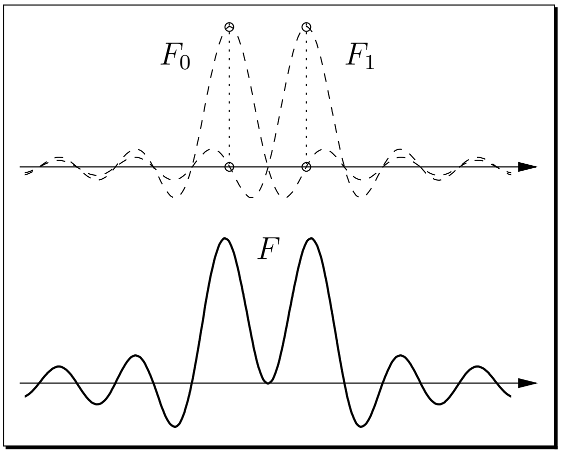


FIG. 2:

Examen – Licence EEA – Module 1 – Analyse

durée 2H

Documents et calculatrices interdits

NB : *on rappelle les définitions et résultats suivants* :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}f(\nu) &= \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\,2\,\pi\,\nu\,t}\mathrm{d}t \\
\mathcal{L}f(p) &= \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-p\,t}\mathrm{d}t \ \ , \ p \in \mathbb{C} \\
\mathcal{L}(f')(p) &= p\,\mathcal{L}f(p) - f(0^+) \\
\mathcal{L}(t\,f)(p) &= -\frac{d}{dp}\mathcal{L}f(p) \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \arctan x + C \\
\varepsilon(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \\
\frac{1}{(p+a)^n} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-a\,t}\, \varepsilon(t)
\end{aligned}
$$

Exercice

1. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et soit U_τ l'opérateur de translation défini par :

$$(U_\tau f)(t) = f(t-\tau)$$

Exprimer la transformée de Fourier $\widehat{U_\tau f}$ de $U_\tau f$ en fonction de la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f.

2. Soit g une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\hat{g}$ soit aussi intégrable et vérifie :

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\nu)\, d\nu$$

En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\nu) e^{+2\,i\,\pi\,\nu\,y}\, d\nu$$

3. *Application* : soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = e^{-|t|}$. Calculer la transformée de Fourier $\hat{h}$ de h. Calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\nu)\, d\nu$$

et en déduire la transformée de Fourier de :

$$x : t \mapsto \frac{2}{1+4\pi^2 t^2}$$

Problème

Pour n, entier naturel donné, soit f_n une fonction nulle pour t négatif, vérifiant pour tout t positif l'équation différentielle :

$$t\, f_n''(t) + f_n'(t) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{t}{4}\right) f_n(t) = 0$$

1. En supposant que cette équation différentielle admette une solution possédant une transformée de Laplace F_n, montrer que F_n est solution d'une autre équation différentielle que l'on écrira.
2. Résoudre cette deuxième équation différentielle et montrer que la solution générale s'écrit :

   $$F_n(p) = A\,(p+\alpha)^n (p+\beta)^{-n-1}$$

   où A appartient à $\mathbb{C}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ et β est une constante à déterminer. Dans la suite de l'exercice, on supposera $A = 1$.
3. Calculer $f_0(t)$ et $f_1(t)$.
4. En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace, vérifier que, pour k appartenant à $\{0,1,\ldots,n-1\}$:

   $$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\, t^k f_n(t)\, dt = 0$$

(5.) *Question hors-barème*

On montre (résultat admis) que :

$$e^{\frac{t}{2}} f_n(t) = L_n(t) \text{ où } L_n(t) = \frac{1}{n!}\, e^t \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t} t^n\right), t \geq 0$$

On précise de plus que la dérivée n-ième du produit de f par g s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(f \cdot g) = \sum_{k+l=n} C_n^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(f)\, \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l}(g)$$

avec :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Déduire des questions précédentes que si $m \neq n$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} L_n(t) L_m(t)\, dt = 0$$

Examen – Licence EEA – Module 1 – Analyse – Durée 2H

Documents et calculatrices interdits

Les exercices sont indépendants. On lira attentivement le sujet avant de composer. Il est demandé :
- *de respecter les notations proposées,*
- *d'écrire lisiblement et proprement,*
- *de réfléchir avant de se lancer dans des calculs inconsidérés.*
- *de ne pas répondre aux questions qui ne sont pas posées.*

***NB** : on rappelle les définitions et résultats suivants :*

$$\mathcal{F}f(\nu) = \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\,2\,\pi\,\nu\,t} \mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}f(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-p\,t} \mathrm{d}t \ , \ p \in \mathbb{C}$$

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Pour $\mathcal{R}e(a) > 0$ on a les transformées inverses suivantes :

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\,2\,\pi\,\nu + a}\right] = e^{-a\,t}\,\varepsilon(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{-1}{\mathrm{j}\,2\,\pi\,\nu - a}\right] = e^{a\,t}\,\varepsilon(-t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{j}\,2\,\pi\,\nu + b}{(\mathrm{j}\,2\,\pi\,\nu)^2 - a^2}\right] = \frac{a-b}{2\,a}\,e^{-a\,t}\,\varepsilon(t) - \frac{a+b}{2\,a}\,e^{a\,t}\,\varepsilon(-t)$$

Exercice 1

On considère un filtre d'entrée u et de sortie v décrit par une équation différentielle de la forme :

$$a_2\,v'' + a_1\,v' + a_0\,v = b_1\,u' + b_0\,u$$

avec a_1, a_2, a_3, b_0, $b_1 \in \mathbb{R}$, et $a_1 \neq 0$.

a – Écrire la fonction de transfert $H_{\mathcal{F}}$ en utilisant la transformée de Fourier.

b – Les coefficients a_i et b_j étant réels, quelles conclusions peut-on faire sur les pôles de $H_{\mathcal{F}}$ (on pourra raisonner à partir de la factorisation du dénominateur) ?

c – Quelle est alors la forme générale de chaque élément simple d'une décomposition dans $\mathbb{C}$ de $H_{\mathcal{F}}$?

d – À partir des questions b et c, déduire la forme des différents termes possibles de la transformée inverse.

Exercice 2

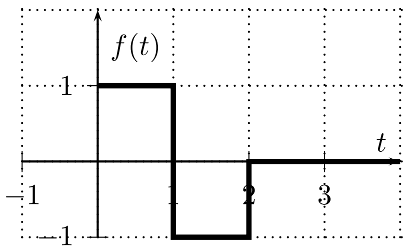


FIG. 1

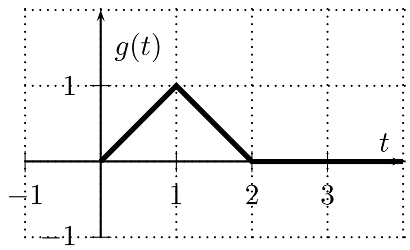


FIG. 2

a – Démontrer que $\mathcal{L}(f')(p) = p\,\mathcal{L}f(p) - f(0^+)$. On supposera que $\left|e^{-t\,p} f(t)\right| \to 0$ quand $t \to \infty$

b – Calculer la transformée de laplace de la fonction f représentée FIG. 1

c – Calculer la transformée de Laplace de la fonction g représentée FIG. 2.

Problème

On considère la fonction f représentée sur la FIG. 3, définie sur l'intervalle $t \in [0;\ 2]$ par : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\, t\right)$ et périodique de période $T = 2$.

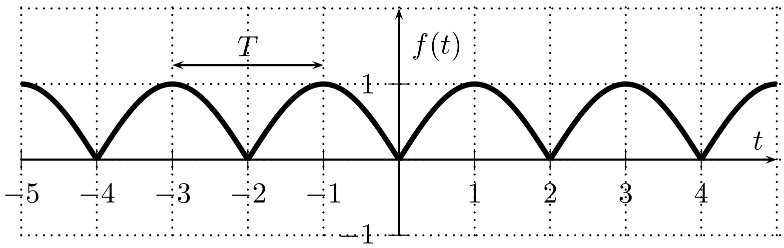


FIG. 3

a – Après avoir donné les raisons pour lesquelles la fonction f admet un développement en série de Fourier, calculer les coefficients a_n et b_n de la décomposition de la fonction f sous la forme :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n\, \cos(2\, n\, \pi\, \nu_0\, t) + b_n\, \sin(2\, n\, \pi\, \nu_0\, t)]$$

On explicitera les simplifications de calculs apportées par les propriétés de f, ainsi que les valeurs a_0 et ν_0. À quoi correspondent ces deux dernières valeurs ?

b – La fonction f pourrait-elle être la réponse impulsionnelle ou indicielle d'un filtre décrit par une équation différentielle à coefficients constants ? justifier votre réponse à l'aide de l'exercice 1.

On considère maintenant le filtre :

$$v'' - a^2\, v = b\, u + u' \quad \text{où } a, b \in \mathbb{C} \text{ et } \mathcal{R}e(a) > 0$$

u est l'entrée du filtre, v sa sortie. On travaillera avec la transformée de Fourier.

c – Donner la fonction de transfert $H_{\mathcal{F}}(\nu)$ de ce filtre.

d – En déduire sa réponse impulsionnelle $h_{\mathcal{F}}(t)$ (on pourra décomposer en éléments simples). Conclusion ?

e – Quelle condition permettrait de rendre ce filtre causal ?

f – Esquisser la représentation graphique de la réponse impulsionnelle $h_{\mathcal{F}}(t)$. On pourra prendre $a = 1$ et $b = 2$.

g – Donner deux méthodes pour connaître la réponse indicielle du filtre (on ne demande pas de la calculer).

h – Donner les coefficients de Fourier a_n et b_n de la dérivée h' d'une fonction h périodique quelconque, à partir de ceux de h.

i – On présente, en entrée du filtre, la fonction f de la FIG. 3. Déduire de la question h une expression de la réponse correspondante en sortie du filtre.

j – Calculer le produit de convolution $h_{\mathcal{F}}(t) * \varepsilon(t)$.

Examen + Partiel – Licence EEA – Module 1 – Analyse – Durée 2H00

Documents et calculatrices interdits

Les exercices sont indépendants. On lira attentivement le sujet avant de composer. Il est demandé :

- *de respecter les notations proposées,*
- *d'écrire lisiblement et proprement,*
- *de réfléchir avant de se lancer dans des calculs inconsidérés.*
- *de ne pas répondre aux questions qui ne sont pas posées.*

***NB** : on rappelle les définitions et résultats suivants :*

$$\mathcal{F}f(\nu) = \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\,2\,\pi\,\nu\,t} \mathrm{d}t \quad ; \quad \mathcal{L}f(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-p\,t} \mathrm{d}t \ ,\ p \in \mathbb{C} \quad ; \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\ \cos(b) \mp \sin(a)\ \sin(b) \quad ; \quad \sin(a \pm b) = \sin(a)\ \cos(b) \pm \cos(a)\ \sin(b)$$

Questions de cours

On considère deux écritures possibles d'une fonction s presque partout égale à une fonction f :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \cos(n\,\omega\,t) + b_n\ \sin(n\,\omega\,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\,k\,\omega\,t}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

1° Donner les conditions sur f pour que la série s converge.

2° Démontrer les relations suivantes :

$$c_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2} \quad \text{et} \quad c_{-n} = \frac{a_n + i\,b_n}{2}$$

3° Exprimer, pour tout t, $s(t)$ en fonction de $f(t)$ lorsque les conditions demandées en 1° sont satisfaites.

4° Supposons f dérivable au sens des fonctions et appelons f' sa dérivée. Calculer les coefficients $a_n(f')$ et $b_n(f')$ de la fonction dérivée f' en fonction de $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

Exercice 1

On considère la fonction $f(t) = e^t\, \varepsilon(t)$.

1° Montrer que la fonction f n'admet pas de transformée de Fourier.

2° Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f\, e^{-\alpha\, t}$ avec α réel, supérieur à une certaine valeur qu'on précisera.

3° En déduire la transformée de Laplace de f, en précisant votre démarche.

4° Quelle est l'abscisse de sommabilité de f ?

Problème

On considère la fonction f_T périodique de période T, définie sur l'intervalle $t \in \left[-\frac{T}{4};\ \frac{T}{4}\right]$ par $\cos\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right)$, et par 0 sur le reste de la période. f_2 est par exemple donnée sur la figure 1. On considère également la fonction g de la figure 2.

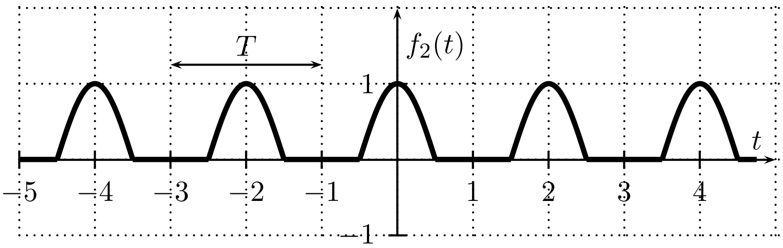


Figure 1

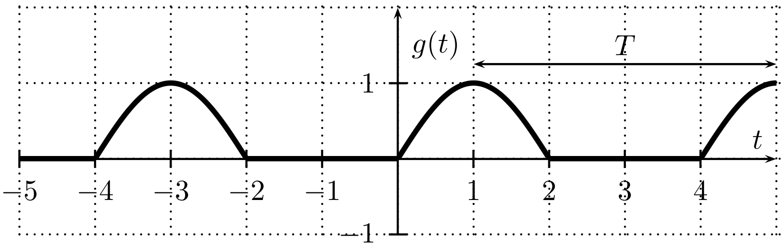


Figure 2

On suppose connus les coefficients $a_n(f_2)$ et $b_n(f_2)$ de la décomposition en série de Fourier de f_2 :

$$f_2(t) = a_0(f_2) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f_2)\,\cos(n\,\omega\,t) + b_n(f_2)\,\sin(n\,\omega\,t) \qquad (1)$$

et on cherche à en déduire $a_n(g)$ et $b_n(g)$.

1° Donner une représentation graphique de f_4.

2° Exprimer les coefficients $a_n(f_4)$ et $b_n(f_4)$ de f_4 par rapport à ceux de f_2.

3° Exprimer g en fonction de f_4.

4° Donner l'expression de la décomposition en série de Fourier de g suivant la même forme que (1). En déduire l'expression des coefficients $a_n(g)$ et $b_n(g)$.

Soit maintenant la fonction f représentée sur la figure 3.

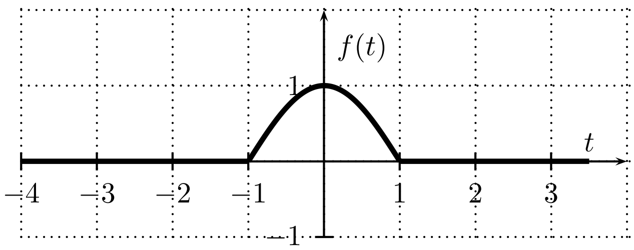


Figure 3

5° Calculer la transformée de Fourier de f.

6° Calculer les coefficients $a_n(f_4)$ et $b_n(f_4)$.

7° Tracer le spectre de f_4 sur l'intervalle $\nu \in [-2;\ 2]$

8° En considérant que la fonction f est la troncature de la fonction f_4, que peut-on dire sur le spectre de f par rapport à celui de f_4 ?

9° Donner une esquisse de ce spectre à partir des résultats des questions 1° et 4°.

Examen + Partiel – Licence EEA – Module 1 – Analyse – Durée 2H00

Documents et calculatrices interdits

On lira attentivement le sujet avant de composer.
Les différentes parties sont indépendantes, mais les résultats de l'une pourront être utilisés tels quels dans une autre.
Il est demandé :

- *de respecter les notations proposées,*
- *d'écrire lisiblement et proprement,*
- *de réfléchir avant de se lancer dans des calculs inconsidérés.*
- *de ne pas répondre aux questions qui ne sont pas posées.*

Enfin, le sujet étant long (et donc noté en conséquence), au survol superficiel de l'ensemble des questions, on préférera s'attacher à en résoudre correctement un plus petit nombre.

On rappelle les définitions et résultats suivants :

- Coefficients de Fourier d'une fonction f de période T : $c_k = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}$, $k \in \mathbb{Z}$
- Transformée de Fourier d'une fonction f : $(\mathscr{F} f)(\nu) = \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j2\pi\nu t}\mathrm{d}t$, $\nu \in \mathbb{R}$
- Transformée de Laplace d'une fonction f : $(\mathscr{L} f)(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\mathrm{d}t$, $p \in \mathbb{C}$
- Fonction échelon : $\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$
- Produit de convolution : $f \star g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$
- Nombre complexe a : $a = \Re(a) + j\Im(a)$ où $j^2 = -1$
- Formules trigonométriques : $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
  $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

Questions de cours

1. Soit une fonction f intégrable sur $[0, +\infty[$. Calculer la transformée de Fourier de $\varepsilon(t)\, e^{-bt} f(t)$ en fonction de la transformée de Laplace $(\mathscr{L} f)(p)$ de $f(t)$ pour $p \in \mathbb{C}$ convenablement choisi.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(a) > 0$:
   (a) $\mathscr{L}(e^{-at}\varepsilon(t)) = \dfrac{1}{p+a}$
   (b) $\mathscr{F}(e^{-at}\varepsilon(t)) = \dfrac{1}{2j\pi\nu + a}$
   (c) $\mathscr{F}(e^{at}\varepsilon(-t)) = \dfrac{-1}{2j\pi\nu - a}$

Exercice

1. Montrer la convergence de la série :

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{k^2 - 2k + 2}\, e^{jkt}$$

Soit la fonction périodique $f_\alpha(t)$, de période 2π définie sur $0 \leq t < 2\pi$ par $e^{-\alpha t}$, où $\alpha \in \{\mathbb{C} - jk\}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

2. Donner une représentation graphique succincte de $f_1(t)$, c.-à-d. pour $\alpha = 1$, sur l'intervalle $[-4\pi; 4\pi]$.
3. Montrer par calcul direct (c.-à-d. sans passer par a_n et b_n) que les coefficients de Fourier c_k de la fonction $f_\alpha(t)$ peuvent s'écrire :

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-2\pi\alpha}}{\alpha + jk}$$

4. Écrire la série de Fourier de $f_\alpha(t)$ à partir de l'expression des c_k précédente.
5. Décomposer $\dfrac{1}{k^2-2k+2}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}$.
6. En identifiant chaque élément simple de la question 5 au résultat de la question 3, déduire que la série de la question 1 est la série de Fourier d'une fonction qu'on déterminera.

Problème

On se propose de comparer les comportements du filtre défini par l'équation différentielle :

$$g'' - 4g = f' \tag{1}$$

dans les régimes qui correspondent au domaine $t \geq 0$, et ceux pour lesquels $-\infty < t < +\infty$.

a. Étude pour $t \geq 0$

On considère des fonctions f et g vérifiant l'équation différentielle (1), définies dans le domaine $[0;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $\mathscr{L}$ la transformée de Laplace.

1. Calculer $\mathscr{L}g$ en fonction de $\mathscr{L}f$, $f(0)$, $g(0)$ et $g'(0)$.
2. Déterminer la fonction de transfert $p \mapsto H_{\mathscr{L}}(p)$.
3. Déterminer une fonction $h_{\mathscr{L}} : [0;+\infty[\to \mathbb{C}$ telle que $\mathscr{L}h_{\mathscr{L}} = H_{\mathscr{L}}$
4. Quelle est l'abscisse de sommabilité de $h_{\mathscr{L}}$?
5. Expliciter la relation de convolution représentant ce filtre dans le domaine temporel.
6. Quelle est la réponse impulsionnelle ?
7. Quelle est la réponse indicielle g_ε ?
8. Trouver la réponse g telle que $g(0) = g'(0) = 0$ à l'entrée $f(t) = \varepsilon(t)\,\dfrac{t^2}{2}$.

b. Étude pour $-\infty < t < +\infty$

On considère maintenant des fonctions f et g vérifiant l'équation différentielle (1), définies dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $\mathscr{F}$ la transformée de Fourier.

1. Déterminer la fonction de transfert $H_{\mathscr{F}}$ correspondant au domaine $-\infty < t < +\infty$.
2. Comparer $H_{\mathscr{F}}$ avec $H_{\mathscr{L}}$
3. Trouver un antécédent $h_{\mathscr{F}}$ de $H_{\mathscr{F}}$
4. Expliciter la relation de convolution représentant ce filtre.
5. Quelle est la réponse impulsionnelle au sens de Fourier ?
6. Quelle est la réponse indicielle g_ε au sens de Fourier ?
7. Donner un filtre dont la réponse impulsionnelle au sens de Fourier soit la fonction g_ε trouvée dans la question précédente.
8. Donner les solutions intégrables de l'équation différentielle $g'' - 4g = 0$ sur $t < 0$ et sur $t > 0$.
   En déduire un nouveau calcul de g_ε.

FIN

Examen – Licence EEA – Module 1 – Analyse – Durée 2H00

Documents et calculatrices interdits

On lira attentivement le sujet avant de composer. Les différentes parties sont indépendantes. Il est demandé :

- *de respecter les notations proposées,*
- *d'écrire lisiblement et proprement,*
- *de réfléchir avant de se lancer dans des calculs inconsidérés.*
- *de ne pas répondre aux questions qui ne sont pas posées.*

On rappelle les définitions et résultats suivants :

$$
\begin{cases}
\text{Transformée de Fourier d'une fonction } f : & (\mathscr{F} f)(\nu) = \hat{f}(\nu) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\,\mathrm{d}t\ ,\ \nu \in \mathbb{R} \\
\text{Transformée de Laplace d'une fonction } f : & (\mathscr{L} f)(p) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-p t}\,\mathrm{d}t\ ,\ p \in \mathbb{C} \\
\text{Formule trigonométrique :} & A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left[\omega t - \arctan\frac{B}{A}\right] \\
\text{Fonction échelon :} & \varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \\
\text{Transformées de Laplace} & \begin{cases} \cos(\omega t)\,\varepsilon(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{p}{p^2+\omega^2} \\ \sin(\omega t)\,\varepsilon(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \end{cases} \\
\text{Théorème du retard et inverse :} & \begin{cases} f(t-a)\,\varepsilon(t-a) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(p)\,e^{-a t} \text{ pour } a \geq 0 \\ f(t)\,e^{-a t}\varepsilon(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(p+a) \end{cases} \\
\text{Théorème de la valeur initiale :} & \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{p\to\infty} p\,F(p) \\
\text{Théorème de la valeur finale :} & \lim\limits_{t\to \infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\,F(p)
\end{cases}
$$

Question de cours

Soit une fonction $f(t)$ nulle pour $t < 0$ et admettant une transformée de Fourier.

Exprimez, pour $\Re(p) \geq 0$, la transformée de Laplace $F(p)$ de $f(t)$ en fonction de la transformée de Fourier d'une fonction qu'on exprimera.

Exercice

On se propose de calculer les transformées de Fourier des deux fonctions données sur la figure 1.

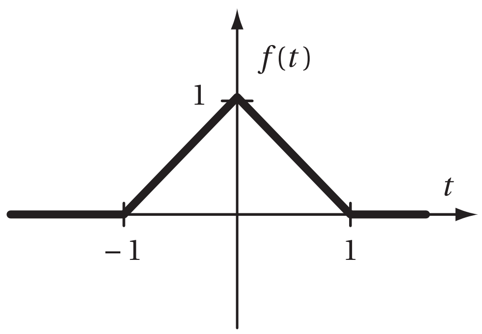


Figure 1.a

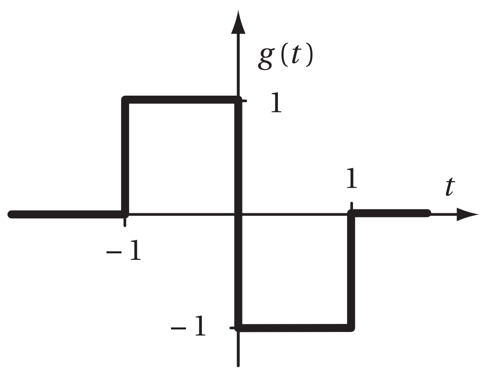


Figure 1.b

1° Calculer la transformée de Fourier $F(\nu)$ de la fonction $f(t)$ représentée sur la figure 1.a.

2° Exprimer la relation liant f et g représentée sur la figure 1.b.

3° En déduire la transformée de Fourier de la fonction $g(t)$.

Problème

On cherche à identifier l'équation différentielle régissant un filtre dont la réponse impulsionnelle $f(t)$ est donnée sur la figure 2.a.

Dans un premier temps on détermine l'expression de $f(t)$ à partir des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ représentées sur la figure 2.b. Les fonctions $f(t)$, $x(t)$ et $y(t)$ sont nulles pour $t<0$.

Dans un deuxième temps, on utilise la transformée de Laplace afin d'établir l'équation différentielle.

Les deux parties sont indépendantes.

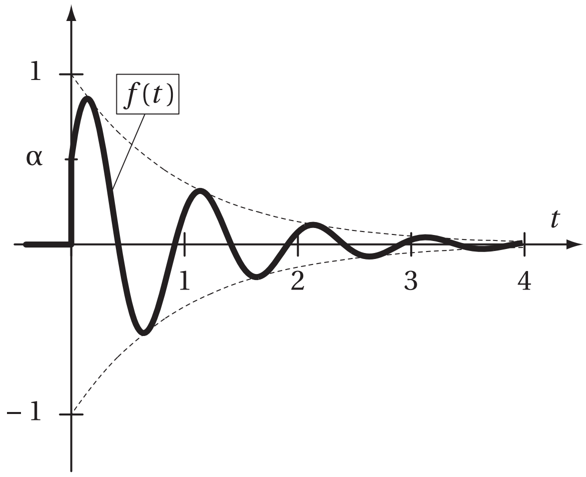


Figure 2.a

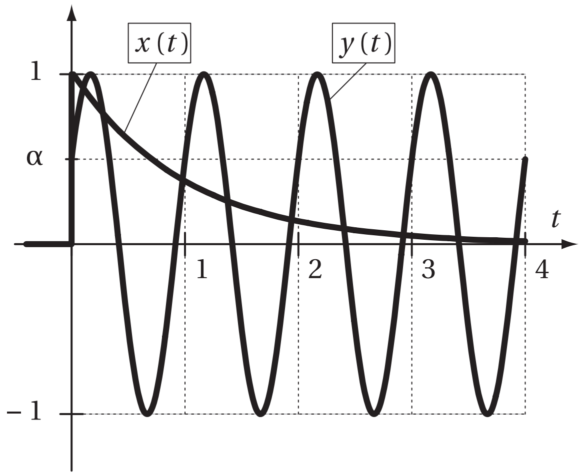


Figure 2.b

Détermination de f

On donne : $x(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$ et on cherche $y(t)$ sous la forme $\cos\left(2\pi\,t-\beta\right)\varepsilon(t)$. De plus, on remarquera que $f = x \times y$.

1° Exprimer la relation entre α et β.

2° Dans le cas particulier où $\alpha = \dfrac{1}{2}$, déduire de la relation précédente deux valeurs possibles pour β. En observant la représentation graphique de $y(t)$, quelle est la valeur correcte de l'angle β. Que vaut alors $\sin\beta$?

3° En déduire $f(t)$ sous la forme $\dfrac{1}{2}\,e^{-t}\left[\cos(\omega\,t)+\gamma\,\sin(\omega\,t)\right]\varepsilon(t)$, où l'on identifiera ω et γ.

Détermination du filtre

Dans cette partie, on pourra garder $f(t)$ sous la forme $\dfrac{1}{2}\,e^{-t}\left[\cos(\omega\,t)+\gamma\,\sin(\omega\,t)\right]\varepsilon(t)$ sans remplacer ni γ ni ω.

4° Donner la transformée de Laplace $Y(p)$ de $y(t)$.

5° Exprimer la transformée de Laplace $F(p)$ de $f(t)$ à partir de celle $Y(p)$ de $y(t)$.

6° Si $f(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre que l'on étudie, que représente $F(p)$?

7° Exprimer $F(p)$ sous la forme d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est un trinôme du second degré en p.

8° Retrouver les valeurs initiale et finale de $f(t)$ à partir de sa transformée de Laplace.

9° Exprimer l'équation différentielle représentant le filtre étudié. On appellera u l'entrée, et v la sortie.

FIN

Examen – L3EEA – Analyse – Durée 2H00

Documents et calculatrices interdits

On lira attentivement le sujet avant de composer. Les différentes parties sont indépendantes. Il est demandé :

- *de respecter les notations proposées,*
- *d'écrire lisiblement et proprement,*
- *de réfléchir avant de se lancer dans des calculs inconsidérés.*
- *de ne pas répondre aux questions qui ne sont pas posées.*

On rappelle les définitions et résultats suivants :

Transformée de Fourier :	$(\mathscr{F}f)(\nu) = \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j2\pi\nu t} \mathrm{d}t\ ,\ \nu \in \mathbb{R}$
Transformée de Laplace :	$(\mathscr{L}f)(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-p\,t} \mathrm{d}t\ ,\ p \in \mathbb{C}$
Fonction échelon :	$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$
Transformée de Laplace pour $a > 0$:	$e^{-a\,t}\, u(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{p+a}$
Produit de convolution de signaux nuls pour $t < 0$:	$g(t) = (h \star f)(t) = \int_0^t h(\tau)\, f(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$
Énergie d'une fonction de la variable x :	$E = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(x)\rvert^2\, \mathrm{d}x$

Exercice 1

On considère le filtre décrit par l'équation différentielle :

$$g'' + 3\,g' + 2\,g = f \tag{1}$$

On appelle $F(p)$ et $G(p)$ les transformées de Laplace respectives de f et g, qu'on suppose exister pour $\mathscr{R}e(p)$ assez grand.

1. Donner l'expression de G en fonction de F et des conditions initiales $f(0)$, $g(0)$ et $g'(0)$.
2. En déduire la fonction de transfert H du filtre (1).
3. Écrire la décomposition en éléments simples de H.
4. En déduire la réponse impulsionnelle h du filtre (1).
5. Calculer la réponse indicielle h_u à partir de la fonction de transfert.
6. Écrire la relation qui lie h et u à g_u. En déduire que la réponse indicielle est la primitive de la réponse impulsionnelle qui s'annule en 0.

Exercice 2

On considère la fonction $f(t) = e^{-a|t|}$, où $a \in \mathbb{R}^+$.

1. Donner une représentation graphique approximative de f.
2. Calculer la transformée de Fourier F de f.
3. Calculer l'énergie E_t de f.
4. On veut calculer l'énergie E_ν de F. Écrire l'intégrale correspondante sans la calculer.
5. Peut-on prévoir le résultat sans calcul?
6. Soit $b > 0$. Déterminer parmi les fonctions nulles pour $t < -b$ et $t > b$, la fonction g_b la plus proche de f en énergie (c.-à-d. la meilleure approximation quadratique de f). Représenter g_b sur le même graphique que celui de f. Que peut on dire de l'énergie de $f - g_b$ lorsque $b \to +\infty$?

Examen – Licence EEA – Module 1 – Analyse – Durée 2H00

Documents et calculatrices interdits

On lira attentivement le sujet avant de composer. Les différentes parties sont indépendantes. Il est demandé :

- *de respecter les notations proposées,*
- *d'écrire lisiblement et proprement,*
- *de réfléchir avant de se lancer dans des calculs inconsidérés.*
- *de ne pas répondre aux questions qui ne sont pas posées.*

On rappelle les définitions et résultats suivants :

Transformée de Fourier :	$(\mathscr{F} f)(\nu) = \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-\mathrm{j}2\pi\nu t} \mathrm{d}t \,,\ \nu \in \mathbb{R}$
Transformée de Laplace :	$(\mathscr{L} f)(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} \mathrm{d}t \,,\ p \in \mathbb{C}$
Formule trigonométrique :	$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
Dérivée :	$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Fonction échelon :	$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$
Transformées de Laplace :	$\begin{cases} e^{-at}\, u(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{p+a} \\ \cos(\omega t)\, u(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{p}{p^2+\omega^2} \\ \sin(\omega t)\, u(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \end{cases}$
Produit de convolution de signaux nuls pour $t<0$:	$g(t) = (h \star f)(t) = \int_0^t h(\tau)\, f(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$
Énergie d'une fonction non-périodique de la variable x :	$\mathscr{E}_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert f\rvert^2(x)\, \mathrm{d}x$
« Énergie » d'une fonction périodique de la variable x :	$\mathscr{E}_f = \frac{1}{T} \int_{(T)} \lvert f\rvert^2(x)\, \mathrm{d}x$

Exercice 1

On considère le filtre décrit par l'équation différentielle :

$$g'' - 4g = f \qquad (1)$$

On appelle $F(p)$ et $G(p)$ les transformées de Laplace respectives de f et g, qu'on suppose exister pour $\mathscr{R}e(p)$ assez grand.

1. Donner l'expression de G en fonction de F et des conditions initiales $f(0)$, $g(0)$ et $g'(0)$.
2. En déduire la fonction de transfert H du filtre 1.
3. Écrire la décomposition en éléments simples de H.
4. En déduire la réponse impulsionnelle h du filtre 1.
5. Si l'on avait effectué le calcul par la transformée de Fourier, aurait-on obtenu la même réponse impulsionnelle ? Justifier la réponse.
6. Calculer la réponse indicielle h_u à partir de la fonction de transfert.

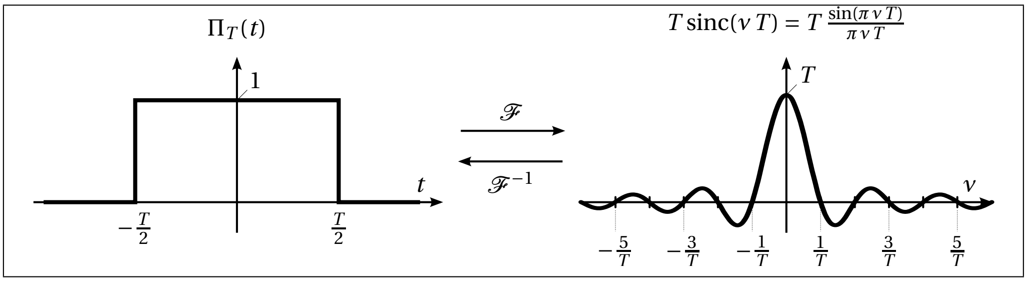
Examen – Licence EEA – Module 1 – Analyse – Durée 2H00

Documents et calculatrices interdits

On lira attentivement le sujet avant de composer. Les différentes parties sont indépendantes. Il est demandé :
- *de respecter les notations proposées et les temps conseillés pour chaque question,*
- *d'écrire lisiblement et proprement,*
- *de réfléchir avant de se lancer dans des calculs inconsidérés.*
- *de ne pas répondre aux questions qui ne sont pas posées.*

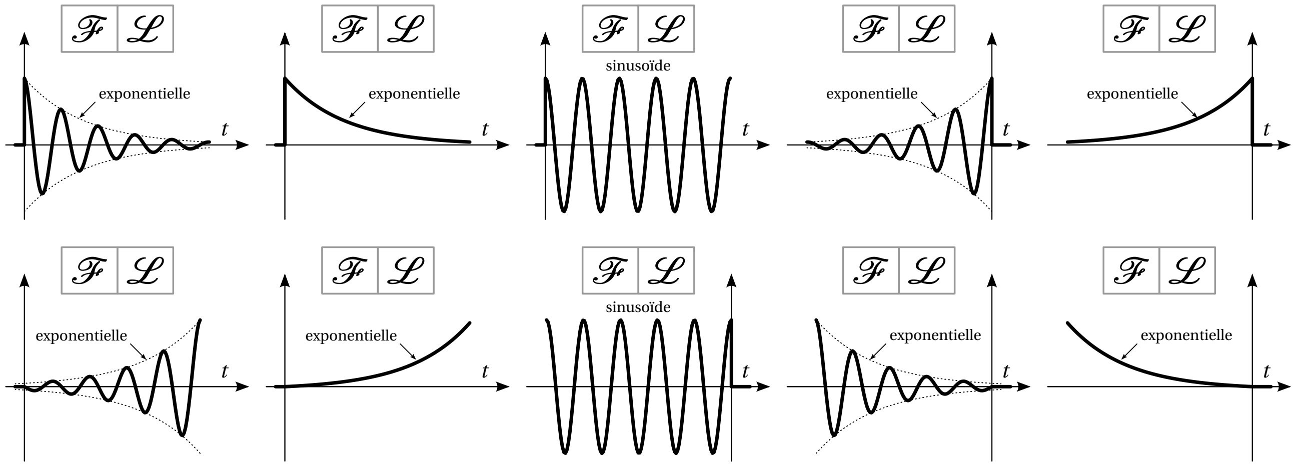
On rappelle les définitions et résultats suivants :

Coefficients de Fourier d'une fonction f de période T :	$c_k(f) = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\, e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}k\,t}\,\mathrm{d}t\ ,\ k \in \mathbb{Z}$
	$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\, e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}k\,t}$
Coefficients de Fourier de la fonction dérivée f' :	$c_k(f') = \left(\mathrm{j}\,\frac{2\pi}{T}\,k\right) c_k(f)$
Définition de la transformée de Laplace :	$(\mathscr{L} f)(p) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-p\,t}\,\mathrm{d}t\ ,\ p \in \mathbb{C}$
Transformée de Laplace :	$\frac{t^n}{n!}\, e^{-a\,t}\, u(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{(p+a)^{n+1}}\ ;\ n \in \mathbb{N}$
Fonction échelon :	$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$
Théorème du retard (Fourier) :	$f(t-\tau) \xrightarrow{\mathscr{F}} e^{-\mathrm{j}2\pi\nu\tau}(\mathscr{F} f)(\nu)$
Énergie d'une fonction non-périodique :	$\mathscr{E}_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert f(t)\rvert^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert F(\nu)\rvert^2\,\mathrm{d}\nu$
Puissance d'une fonction périodique :	$\mathscr{E}_f = \frac{1}{T}\int_{(T)} \lvert f(t)\rvert^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k(f)\rvert^2$
Formules trigonométriques :	$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
	$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$
	$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}\ ;\ \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$



Exercice 1 (5 min)

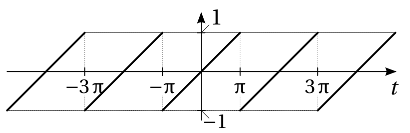
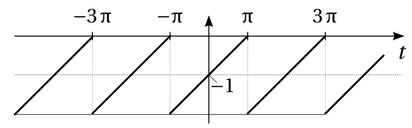
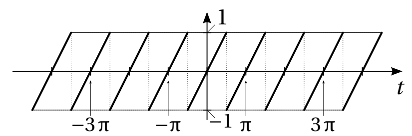
On considère la transformée de Fourier $\mathscr{F}$ et la transformée de Laplace $\mathscr{L}$. Indiquer si les signaux élementaires suivants peuvent être traités par $\mathscr{F}$ et/ou $\mathscr{L}$, en entourant les bonne réponses directement sur cette feuille de sujet, et en justifiant rapidement votre réponse. On précise que les fonctions rencontrées sont nulles soit pour $t > 0$, soit pour $t < 0$, et que sur leur partie non-nulle elles sont soit de forme sinusoïdale, soit de forme exponentielle, soit de forme sinusoïdale inscrite dans une enveloppe exponentielle.



Justification

Exercice 2 (5 min)

On considère la fonction f donnée sur la figure suivante, ainsi que sa série de Fourier. En déduire les séries de Fourier des fonctions g et h proposées.

		
$f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\overbrace{\frac{2}{n}(-1)^{1+n}}^{a_n(f)}\sin(n\,t)$	$g(t)=$	$h(t)=$

Exercice 3 (5 min)

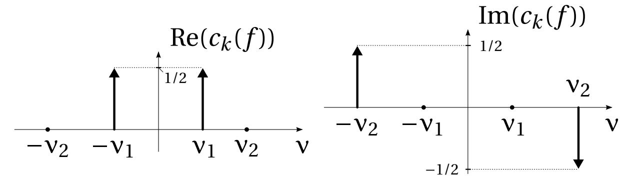
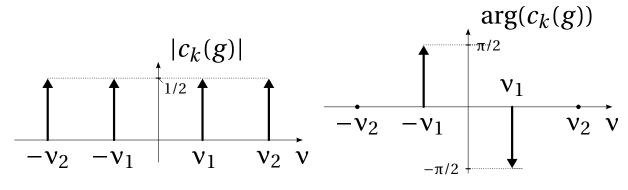
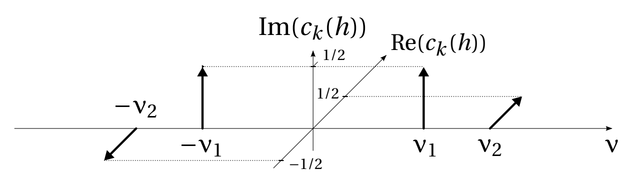
Quelle est la transformée de Laplace élémentaire à connaître permettant de déduire *immédiatement* toutes les réponses impulsionnelles de systèmes linéaires après décomposition en éléments simples ? Pourquoi ?

1) $e^{a\,t}\,u(t)$	2) $e^{a\,t}\,\sin(\omega\,t)\,u(t)$	3) $e^{a\,t}\,\cos(\omega\,t)\,u(t)$	4) $t^n\,e^{a\,t}\,u(t)$

Justification

Exercice 4 (20 min)

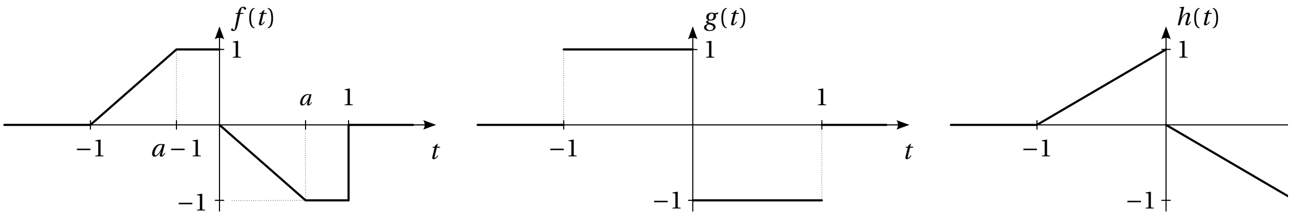
On considère les spectres suivants, donnés sous 3 représentations équivalentes (partie réelle + partie imaginaire, module + argument, 3-D). En déduire l'expression des fonctions temporelles associées.

	$f(t) =$
	$g(t) =$
	$h(t) =$

Exercice 5 (30 min)

On considère les fonctions f, g et h données sur la figure suivante, dans laquelle $0 < a \leq 1$. On donne aussi la transformée de Fourier de f (on pose $\omega = 2\pi\nu$) :

$$(\mathscr{F} f)(\omega) = \frac{1 + \mathrm{j}\omega a - e^{\mathrm{j}\omega} - e^{-\mathrm{j}a\omega} - \mathrm{j}\omega a e^{-\mathrm{j}\omega} + e^{\mathrm{j}(1-a)\omega}}{a\omega^2}$$



1. Donner l'expression de f dans l'intervalle $[-1; a-1]$.
2. Montrer que la transformée de Fourier de h s'écrit $(\mathscr{F} h)(\omega) = \dfrac{\mathrm{j}\omega - \mathrm{j}\omega e^{-\mathrm{j}\omega} + 4\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^2}$
3. Écrire g sous forme d'une somme de deux créneaux $\Pi_T(t)$ déphasés (cf formulaire).
4. En déduire que l'expression de la transformée de Fourier de g est : $(\mathscr{F} g)(\omega) = \dfrac{4\mathrm{j}}{\omega}\sin^2\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$
5. Quelle est la limite de $\dfrac{1 + \mathrm{j}\omega a - e^{\mathrm{j}\omega} - e^{-\mathrm{j}a\omega} - \mathrm{j}\omega a e^{-\mathrm{j}\omega} + e^{\mathrm{j}(1-a)\omega}}{a\omega^2}$ quand $a \to 0$?

Problème (55 min)

On considère un filtre passe-bas décrit par l'équation différentielle : $\tau\, g' + g = f$.

Soit une fonction périodique f_1, de période $T = 2\pi$, décomposée en série de Fourier : $f_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f_1)\, e^{\mathrm{j}\,k\,t}$.

Soit également f_2 la meilleure approximation quadratique de f_1 sur l'intervalle de fréquence $\left[0; \frac{10}{2\pi}\right]$.

1. *Calculer* la fonction de transfert du filtre, applicable aux c_k, permettant de calculer les réponses à toute fonction périodique vérifiant les conditions de Dirichlet.
2. Montrer que la réponse g_1 correspondant à l'entrée $f = f_1$ s'écrit : $g_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k(f_1)}{1 + \mathrm{j}\,\tau\, k}\, e^{\mathrm{j}\,k\,t}$.
3. Écrire l'expression de f_2, ainsi que la réponse g_2 du filtre à l'entrée $f = f_2$.
4. g_2 est-elle la meilleure approximation quadratique de g_1 ?
5. Exprimer la différence de puissance (ou d'énergie sur une période) entre g_2 et g_1 sous la forme d'une série.

On s'intéresse maintenant aux fonctions nulles pour $t < 0$, et on pose $f_3(t) = u(t)\, f_1(t)$ et $f_4(t) = u(t)\, f_2(t)$.

6. Donner la transformée de Laplace $F_3(p)$ de $f_3(t)$.
7. Calculer la fonction de transfert au sens de Laplace du filtre proposé.
8. Calculer la réponse du filtre à une entrée $C\, e^{\mathrm{j}\,k\,t}\, u(t)$, avec $C \in \mathbb{C}$.
9. En déduire que la réponse g_3 du filtre à l'entrée f_3 s'écrit : $g_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k(f_1)}{1 + \mathrm{j}\,\tau\, k} \left(e^{\mathrm{j}\,k\,t} - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.
10. Comparer g_3 avec g_1 calculé précédemment. Conclure.
11. Peut-on obtenir g_4, réponse à l'entrée f_4, simplement à partir de g_3 ou bien doit-on la recalculer complètement ?

FIN