Examen – Licence EEA – Module 1 – Analyse – Durée 1H00

Documents et calculatrices interdits

On lira attentivement le sujet avant de composer. Il est demandé :

- *de respecter les notations proposées,*
- *d'écrire lisiblement et proprement,*
- *de réfléchir avant de se lancer dans des calculs inconsidérés.*
- *de ne pas répondre aux questions qui ne sont pas posées.*

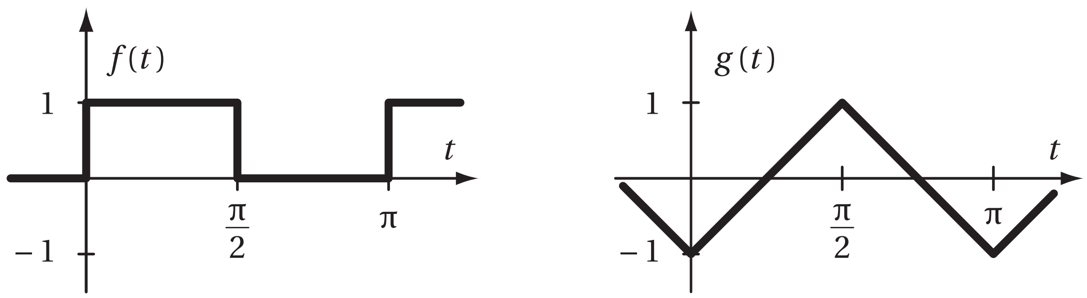
On rappelle les définitions et résultats suivants :

Série de Fourier d'une fonction f de période T : $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\, e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}k\,t}$ avec $c_k(f) = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\, e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}k\,t}\,\mathrm{d}t$, $k \in \mathbb{Z}$

Formules trigonométriques : $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

On se propose d'étudier le spectre des deux fonctions périodiques de période π données figure suivante.



Le tracé des spectres se fera de façon approximative sur l'amplitude.

1° À partir des propriétés de la fonction $f(t)$, donnez les propriétés des coefficients $c_k(f)$ de son développement en série de Fourier.

2° Calculer ces coefficients $c_k(f)$.

3° Quelle est la somme de la série de Fourier de f en $t = \frac{\pi}{2}$?

On donne maintenant les coefficients $c_k(g)$ du développement en série de Fourier de la fonction $g(t)$, ainsi que leur valeur pour k de 0 à 5 :

$$k \in \mathbb{Z}^* \,:\, c_k(g) = 2\,\frac{(-1)^k - 1}{\pi^2\,k^2}$$

$$c_0(g) = 0\,;\ c_1(g) = -0{,}405\,;\ c_2(g) = 0\,;\ c_3(g) = -0{,}0450\,;\ c_4(g) = 0\,;\ c_5(g) = -0{,}0162$$

4° Justifier les propriétés des coefficients $c_k(g)$ à partir des propriétés de la fonction $g(t)$.

5° Tracer la partie réelle du spectre bilatéral de la fonction $g(t)$ pour $\nu \in \left[-\frac{5}{\pi};\frac{5}{\pi}\right]$.

6° Quelles sont les trois transformations simples (translation, symétrie par rapport à un axe ou un point, dérivation, intégration, multiplication ou division par un réel, ...) qui permettent de passer de g à f ? Exprimer $f(t)$ en fonction de $g(t)$.

7° Exprimer les coefficients $c_k(g')$ à partir des coefficients $c_k(g)$.

8° En déduire les coefficients $c_k(f)$ à partir des coefficients $c_k(g)$ (on pourra vérifier le résultat de la question 2°).

9° Tracer la partie imaginaire du spectre bilatéral de la fonction $f(t)$ (on prendra $\pi \approx 3$ pour simplifier l'estimation des $c_k(f)$ à partir des $c_k(g)$).

UPS / UFR-PCA Département EEA Lundi 5 novembre 2007

Examen – Licence EEA – Module 1 – Analyse – Durée 1H30

Documents et calculatrices interdits

On lira attentivement le sujet avant de composer. Les différentes parties sont indépendantes. Il est demandé :

- *de respecter les notations proposées,*
- *d'écrire lisiblement et proprement,*
- *de réfléchir avant de se lancer dans des calculs inconsidérés.*
- *de ne pas répondre aux questions qui ne sont pas posées.*

On rappelle les définitions et résultats suivants :

Série de Fourier d'une fonction f de période T : $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\,n\,t\right) + b_n(f)\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\,n\,t\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,e^{\left(\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}k\,t\right)}$

avec $n \in \mathbb{N}$; $k \in \mathbb{Z}$ et
$$\begin{cases} a_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{(T)} f(t)\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\,n\,t\right)\mathrm{d}t \\ b_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{(T)} f(t)\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\,n\,t\right)\mathrm{d}t \\ c_k(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{(T)} f(t)\,e^{\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}k\,t\right)}\mathrm{d}t \end{cases}$$

Transformée de Laplace d'une fonction f : $(\mathscr{L}f)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-p\,t}\mathrm{d}t$, $p \in \mathbb{C}$

Formule trigonométrique : $A\cos(\omega\,t) + B\sin(\omega\,t) = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left[\omega\,t - \arctan\frac{B}{A}\right]$

Fonction échelon : $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Transformées de Laplace
$$\begin{cases} \cos(\omega\,t)\,u(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \dfrac{p}{p^2+\omega^2} \\ \sin(\omega\,t)\,u(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \end{cases}$$

Formules d'Euler : $\cos(t) = \dfrac{e^{\mathrm{j}\,t}+e^{-\mathrm{j}\,t}}{2}$; $\sin(t) = \dfrac{e^{\mathrm{j}\,t}-e^{-\mathrm{j}\,t}}{2\mathrm{j}}$

Transformée de Laplace de la dérivée : $\mathscr{L}(f') = p\,\mathscr{L}(f) - f(0)$

Exercice 1

On se propose de calculer les séries de Fourier des fonctions f_1 et f_2 données respectivement sur les figures 1 et 2.

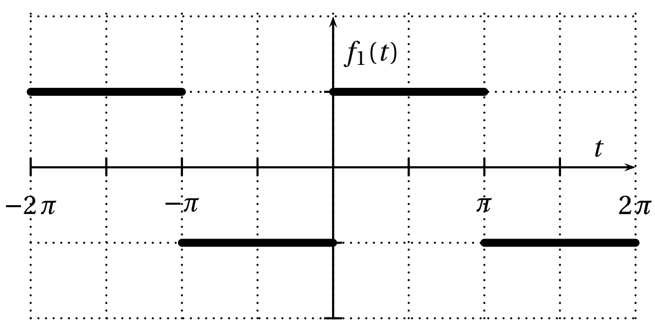


Fig. 1

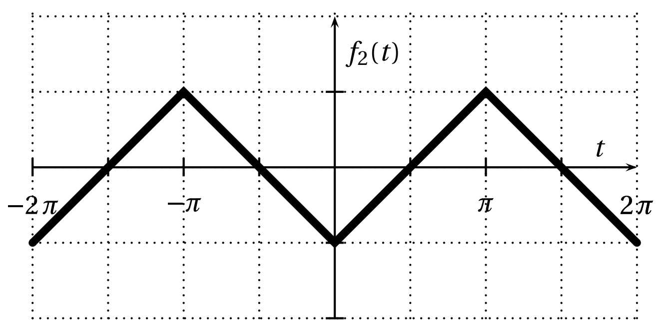


Fig. 2

1º Calculer les coefficients $a_n(f_1)$ et $b_n(f_1)$ de la série de Fourier de f_1.

2º Exprimer la relation liant f_1 et f_2.

3º Déduire de cette relation les coefficients $a_n(f_2)$ et $b_n(f_2)$ de la série de Fourier de la fonction $f_2(t)$.

4º Aurait-il mieux valu calculer f_2 et en déduire f_1 ?

5º Vers quoi converge la série de Fourier de f_1 pour $t = \pi$?

Exercice 2

On considère les fonctions $f_3 = u(t)\cos(t)$ et $f_4 = u(t)\sin(t)$ représentées sur les figures 3 et 4.

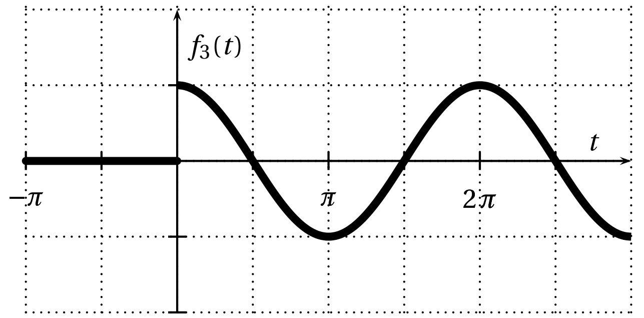


Fig. 3

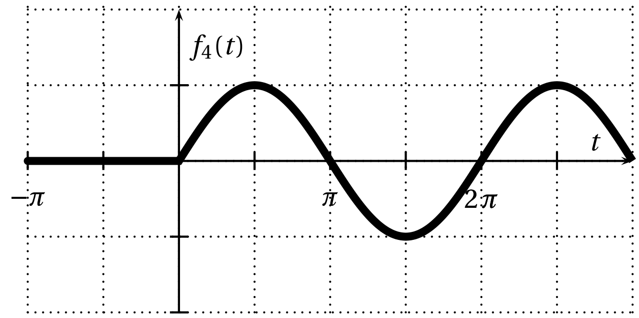


Fig. 4

1° Détailler le calcul de la transformée de Laplace de la fonction f_3 (utiliser la formule d'Euler).

2° Exprimer pour $t > 0$ la relation liant f_3 et f_4.

3° Déduire de cette relation la transformée de Laplace de la fonction f_4.

4° L'intégrale définissant la transformée de Laplace de la fonction f_3 converge-t-elle pour $p = -1$?

Exercice 3

On considère un filtre représenté par l'équation différentielle : $\tau\, g' + g = f$

On veut calculer les réponses g_5 et g_6 en sortie de ce filtre, pour les entrées respectives $f_5 = \cos(t)$ et $f_6 = u(t)\cos(t)$ représentées sur les figures 5 et 6.

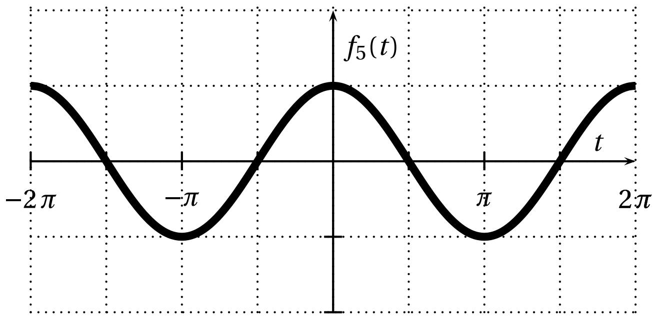


Fig. 5

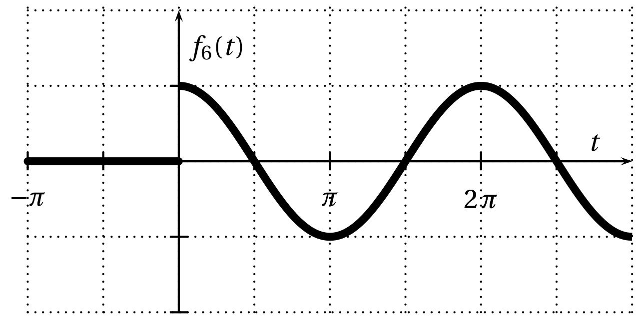


Fig. 6

1° Expliquer succinctement pourquoi il convient d'utiliser les séries de Fourier pour le calcul de g_5, et la transformée de Laplace pour le calcul de g_6.

On s'intéresse tout d'abord à g_5.

2° Donner rapidement les coefficients $c_k(f_5)$ de la série de Fourier de f_5.

3° Exprimer les coefficients $c_k(g_5)$ de la série de Fourier de g_5 en fonction de ceux $c_k(f_5)$ de f_5.

4° En déduire l'expression de $g_5(t)$. Peut-on trouver une valeur de τ telle que $g_5(t) = \sin(t)$?

On s'intéresse ensuite à g_6.

5° Calculer la fonction de transfert du filtre, au sens de Laplace.

6° Calculer la transformée de Laplace de f_6.

7° En déduire la transformée de Laplace de g_6.

8° En déduire l'expression de $g_6(t)$.

Et finalement :

9° Montrer que $g_6(t)$ est la somme de $g_5(t)$ et d'une fonction tendant vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

Conclusion ?

Examen – Licence EEA – Module 1 – Outils mathématiques – Durée 1H30

Documents et calculatrices interdits

On lira attentivement le sujet avant de composer. Les différentes parties sont indépendantes. Il est demandé :

- *de respecter les notations proposées,*
- *d'écrire lisiblement et proprement,*
- *de réfléchir avant de se lancer dans des calculs inconsidérés.*
- *de ne pas répondre aux questions qui ne sont pas posées.*

Formulaire

Transformée de Fourier : $(\mathscr{F}f)(\nu)=\hat{f}(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t\ ,\ \nu\in\mathbb{R}$

Transformée de Fourier de la dérivée : $(\mathscr{F}f')(\nu)=(\mathrm{j}2\pi\nu)(\mathscr{F}f)(\nu)$

$$u(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ 1 & \text{si } t\geq 0\end{cases}$$

Série de Fourier d'une fonction f de période T : $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos\left(\frac{2\pi}{T}n\,t\right)+b_n(f)\sin\left(\frac{2\pi}{T}n\,t\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,e^{\left(\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}k\,t\right)}$

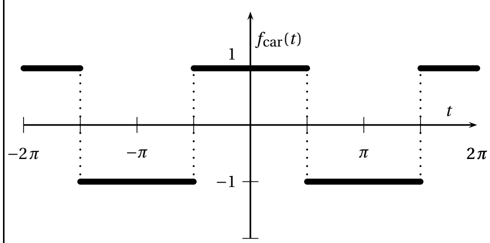
avec $n\in\mathbb{N}$; $k\in\mathbb{Z}$ et $\begin{cases} a_n(f) &=& \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}n\,t\right)\mathrm{d}t\\ b_n(f) &=& \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}n\,t\right)\mathrm{d}t\\ c_k(f) &=& \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\,e^{\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}k\,t\right)}\mathrm{d}t\end{cases}$

Coefficients de Fourier de la dérivée : $a_n(f')=\left(\frac{2\pi}{T}n\right)b_n(f); b_n(f')=-\left(\frac{2\pi}{T}n\right)a_n(f); c_k(f')=\left(\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}k\right)c_k(f)$

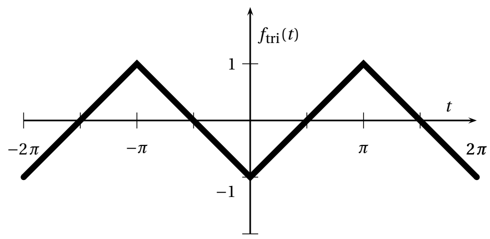
Formules d'Euler : $\cos(t)=\frac{e^{\mathrm{j}t}+e^{-\mathrm{j}t}}{2}$; $\sin(t)=\frac{e^{\mathrm{j}t}-e^{-\mathrm{j}t}}{2\mathrm{j}}$

Formule trigonométrique : $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\sin b\cos a$

Transformée de Fourier inverse pour $\Re(a)>0$: $\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{j}2\pi\nu+a}\right]=e^{-a\,t}\,u(t)$



$$f_{\rm car}(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\overbrace{\frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}^{a_n(f_{\rm car})}\cos(n\,t)$$



$$f_{\rm tri}(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\overbrace{\frac{4((-1)^n-1)}{\pi^2\,n^2}}^{a_n(f_{\rm tri})}\cos(n\,t)$$

Exercice 1

On se propose de calculer les séries de Fourier des fonctions f_1 et f_2 données sur les figures 1 et 2, pour lesquelles $0\leq a<\pi$.

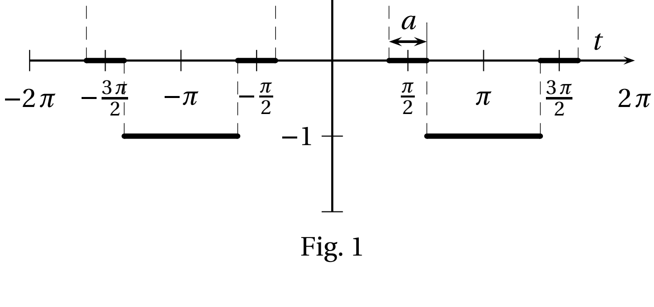


Fig. 1

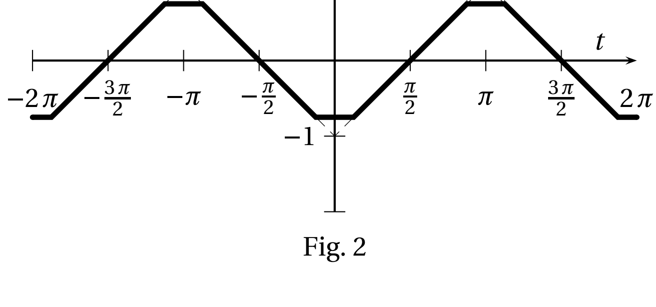


Fig. 2

1. Calculer les coefficients $a_n(f_1)$ et $b_n(f_1)$ de la série de Fourier de f_1.
2. Exprimer la relation liant f_1 et f_2. Déduire de cette relation les coefficients $a_n(f_2)$ et $b_n(f_2)$.
3. Aurait-il mieux valu calculer f_2 et en déduire f_1 ?
4. Quelle condition permet d'obtenir un signal carré pour f_1, et triangulaire pour f_2 ? En appliquant cette condition sur les coefficients calculés, retrouver les coefficients des signaux carré et triangulaire.
5. Vers quoi converge la série de Fourier de f_1 pour $t = \dfrac{\pi - a}{2}$?

Exercice 2

On considère un filtre passe-bas RC du premier ordre, représenté sur la figure

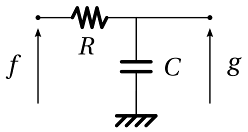


Fig. 3

1. Montrer que l'équation différentielle régissant le fonctionnement de ce filtre est :

$$\tau g' + g = f \tag{1}$$

   où τ est une variable qu'on explicitera.
2. Donner la fonction de transfert $H = \dfrac{G}{F}$ de ce filtre au sens de Fourier (F et G sont les transformées de Fourier respectives de f et g).
3. En déduire la transformée de Fourier inverse h de H.

On considère maintenant la fonction créneau $f_\Delta(t)$ représentée sur la figure 4.

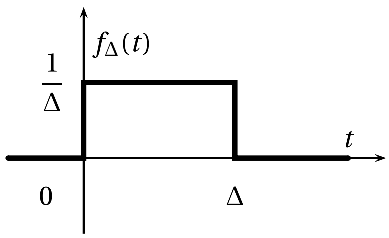


Fig. 4

4. Donner la transformée de Fourier F_Δ de la fonction f_Δ.
5. En déduire la transformée de Fourier G_Δ de la réponse du filtre (1) à l'entrée f_Δ.
6. Écrire f_Δ comme la superposition de deux échelons décalés.
7. On admet que la réponse indicielle g_u du filtre (1) (donc à l'entrée $f = u$) s'écrit : $\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u(t)$. Donner la réponse du filtre (1) correspondante à chacun des deux échelons de la question précédente. En déduire la réponse g_Δ du filtre (1) à l'entrée f_Δ. Que peut-on dire de G_Δ par rapport à g_Δ ?
8. Donner une représentation graphique approximative de g_Δ et h. On précisera notamment la valeur de $g_\Delta(t)$ en $t = \Delta$.
9. On considère l'impulsion unitaire $\delta(t)$ comme la limite de f_Δ lorsque Δ tend vers 0 :

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} f_\Delta(t) = f_0(t)$$

   En considérant h comme la réponse impulsionnelle (c.-à-d. la réponse à $f = \delta$), que peut-on dire de la valeur de $g_\Delta(\Delta)$ lorsque $\Delta \to 0$?

Examen – L3 EEA – Outils mathématiques – Durée 1H30

Documents et calculatrices interdits

On lira attentivement le sujet avant de composer. Les différentes parties sont indépendantes. Il est demandé :

- *de respecter les notations proposées,*
- *d'écrire lisiblement et proprement,*
- *de respecter le temps conseillé indiqué pour chaque question,*
- *de ne pas répondre aux questions qui ne sont pas posées.*

Formulaire

Fonction échelon : $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Transformée de Fourier : $(\mathscr{F} f)(\nu) = \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j2\pi\nu t} \mathrm{d}t$, $\nu \in \mathbb{R}$

$(\mathscr{F} f')(\nu) = (j2\pi\nu)(\mathscr{F} f)(\nu)$

$(\mathscr{F} f)'(\nu) = \mathscr{F}(-j2\pi t f)(\nu)$

Série de Fourier d'une fonction f de période T : $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(\omega n t) + b_n(f)\sin(\omega n t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\, e^{(j\omega k t)}$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $n \in \mathbb{N}$; $k \in \mathbb{Z}$ et $\begin{cases} a_n(f) &= \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\cos(\omega n t)\,\mathrm{d}t \\ b_n(f) &= \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\sin(\omega n t)\,\mathrm{d}t \\ c_k(f) &= \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\, e^{(-j\omega k t)}\,\mathrm{d}t \end{cases}$

Coefficients de Fourier de la dérivée : $a_n(f') = (\omega n)\, b_n(f)$; $b_n(f') = -(\omega n)\, a_n(f)$; $c_k(f') = \left(j\omega k\right) c_k(f)$

Formules d'Euler : $\cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$; $\sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$

Formules trigonométriques : $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$; $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \cos b$

Exercice 1

Temps conseillé : 5 minutes

Donner les coefficients de Fourier a_n, b_n et c_k de la fonction $f(t) = 1 + \sin(t)$.

Exercice 2

Temps conseillé : 5 minutes

On considère la fonction f donnée sur la figure 1 :

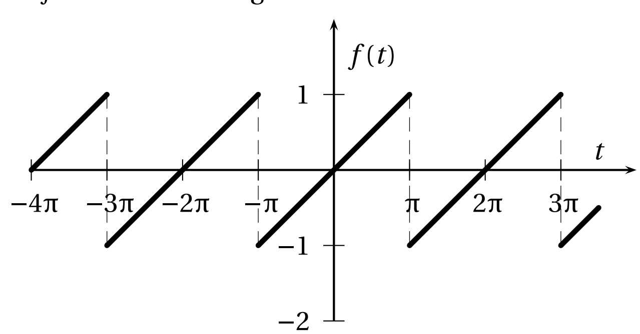


Figure 1

Quelle peut être la série de Fourier de $f(t)$ entre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{1+n}}{n^2\pi}\sin(n\,t)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{1+n}}{n\pi}\sin(n\,t)$? Justifier votre réponse sans calcul.

Exercice 3

Temps conseillé : 20 minutes

On considère les fonctions carrée $f_{\text{car}}(t)$ et triangle $f_{\text{tri}}(t)$ données sur les figures 2 et 3.

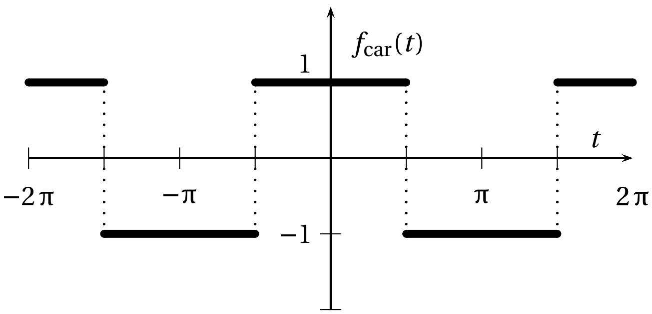


Figure 2

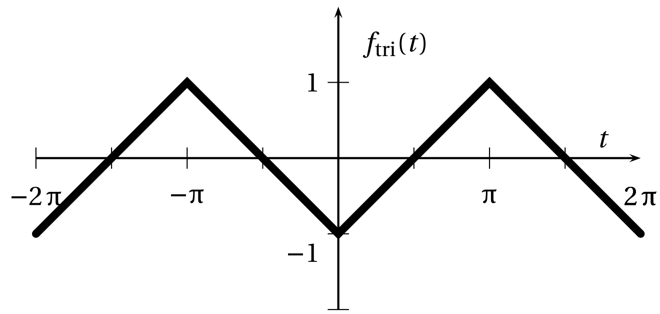


Figure 3

1. Montrer que la série de Fourier de la fonction $f_{\text{car}}(t)$ s'écrit : $f_{\text{car}}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \overbrace{\frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}^{a_n(f_{\text{car}})} \cos(n\,t)$
2. Exprimer la relation liant $f_{\text{tri}}(t)$ et $f_{\text{car}}(t)$ (deux opérations élémentaires). Déduire de cette relation les coefficients de Fourier de $f_{\text{tri}}(t)$ à partir de ceux de $f_{\text{car}}(t)$, et montrer que la série de Fourier de $f_{\text{tri}}(t)$ s'écrit : $f_{\text{tri}}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{4((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}}_{a_n(f_{\text{tri}})} \cos(n\,t)$
3. Vers quoi converge la série de Fourier de f_{car} pour $t = \frac{\pi}{2}$?

Exercice 4

Temps conseillé : 30 minutes

1. Donner l'allure approximative des fonctions $f_1(t) = \sin(t)$ puis $f_2(t) = e^{-a\,t}$ avec $a \in \mathbb{R}^+$ (on pourra prendre $a = 1$ pour le tracé). En déduire l'allure de la fonction $f(t) = \sin(t)\,e^{-a\,t}\,u(t)$.
2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $u(t)\,e^{(-a+\text{j}b)\,t}$.
3. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$.
4. En déduire la transformée de Fourier de la fonction $g(t) = t\,\sin(t)\,e^{-a\,t}\,u(t)$
5. En déduire la transformée de Fourier de la fonction $g(2\,t)$.

Examen – L3 EEA – Outils mathématiques – Durée 1H30

Documents et calculatrices interdits

On lira attentivement le sujet avant de composer. Les différentes parties sont indépendantes. Il est demandé :

- *de* **respecter** *les notations proposées,*
- *de* **justifier** *vos réponses,*
- *d'écrire* **lisiblement** *et* **proprement**,
- *de* **respecter** *le temps conseillé indiqué pour chaque question,*
- *de* **ne pas** *répondre aux questions qui* **ne sont pas** *posées.*

Formulaire

Série de Fourier d'une fonction f de période T

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\,\cos(\omega\,n\,t) + b_n(f)\,\sin(\omega\,n\,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,e^{(j\,\omega\,k\,t)}$$

$$\begin{cases} a_n(f) &= \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{(T)} f(t)\,\cos(\omega\,n\,t)\,\mathrm{d}t \\ b_n(f) &= \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{(T)} f(t)\,\sin(\omega\,n\,t)\,\mathrm{d}t \\ c_k(f) &= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{(T)} f(t)\,e^{(-j\,\omega\,k\,t)}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\ ;\ n \in \mathbb{N}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \qquad c_{\pm n} = \frac{a_n \mp j\,b_n}{2}$$

Fonction échelon

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Formules d'Euler

$$\cos(t) = \frac{e^{j\,t} + e^{-j\,t}}{2} \qquad \sin(t) = \frac{e^{j\,t} - e^{-j\,t}}{2j}$$

Formules trigonométriques

$$\sin(a \pm b) = \sin a\,\cos b \pm \sin b\,\cos a$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a\,\cos b \mp \sin a\,\cos b$$

Intégration par parties

$$\int u'\,v = [u\,v] - \int u\,v'$$

Transformée de Fourier

$$(\mathcal{F}f)(\nu) = \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-j\,2\,\pi\,\nu\,t}\mathrm{d}t\ ,\ \nu \in \mathbb{R}$$

Transformée de la dérivée : $(\mathcal{F}f')(\nu) = (j\,2\,\pi\,\nu)(\mathcal{F}f)(\nu)$

Dérivée de la transformée : $(\mathcal{F}f)'(\nu) = \mathcal{F}(-j\,2\,\pi\,t\,f)(\nu)$

Théorème du retard : $(\mathcal{F}f(t-\tau))(\nu) = e^{-j\,2\,\pi\,\nu\,\tau}\,(\mathcal{F}f)(\nu)$

Exercice 1 : (Temps conseillé : 15 minutes)

Soit f une fonction décomposable en série de Fourier et f' sa dérivée. Montrer les égalités suivantes :

$$a_n(f') = (\omega\,n)\ b_n(f)$$
$$b_n(f') = -(\omega\,n)\ a_n(f)$$
$$c_k(f') = (j\,\omega\,k)\ c_k(f)$$

Exercice 2 : (Temps conseillé : 25 minutes)

On considère la fonction de période π définie sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(t) = \frac{\pi^2}{4} - t^2$, et par 0 sinon.

1. Donner la représentation graphique de $-t^2$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, puis de f sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

Exercice 3 : (Temps conseillé : 20 minutes)

Parmi les 4 spectres (a), (b), (c) et (d) donnés sur la figure 1, quels sont ceux qui représentent une fonction réelle ? Justifiez votre réponse. Donner l'expression des fonctions correspondantes.

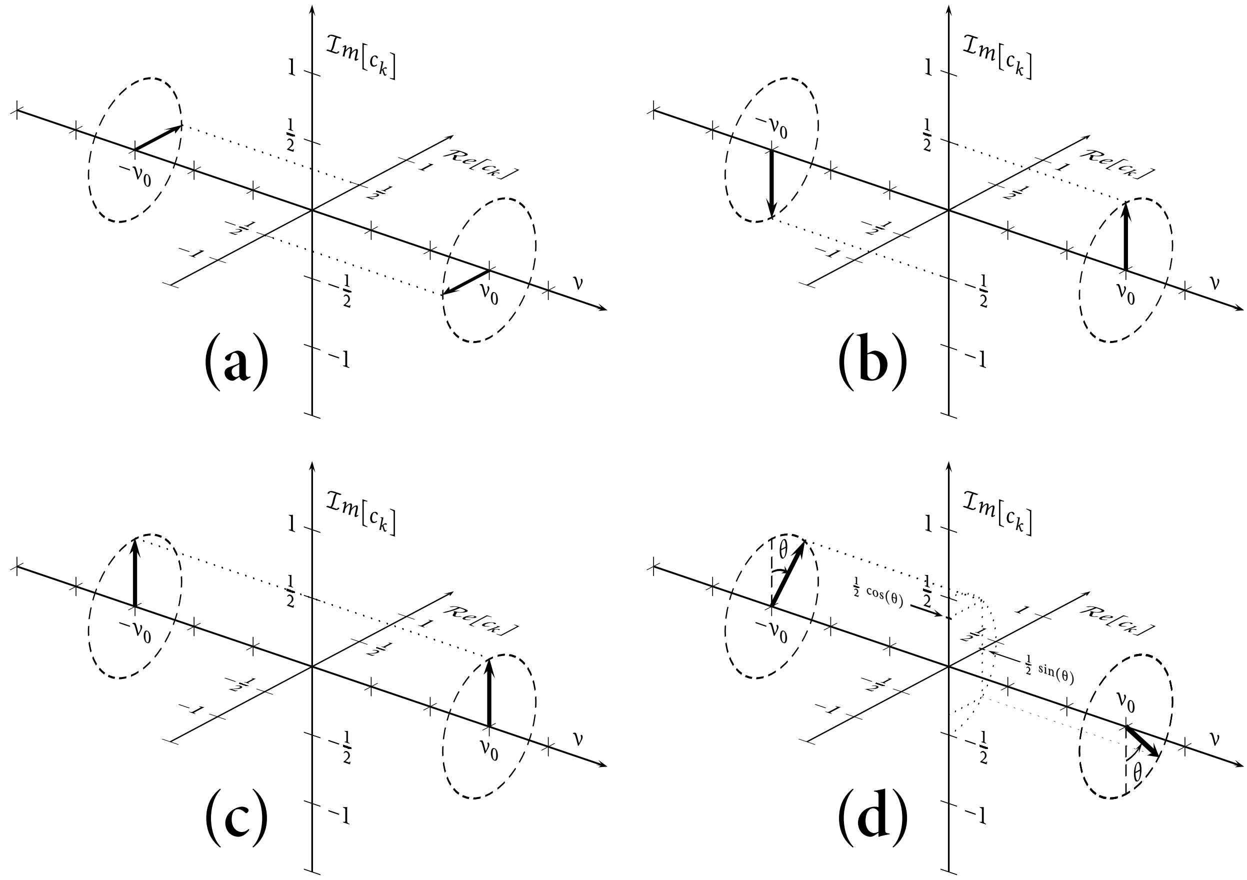


Figure 1

Exercice 4 : (Temps conseillé : 30 minutes)

Soit la fonction $f_{\Delta,\tau}(t)$ représentée sur la figure 2 (créneau d'amplitude 1, de largeur Δ, centré sur τ).

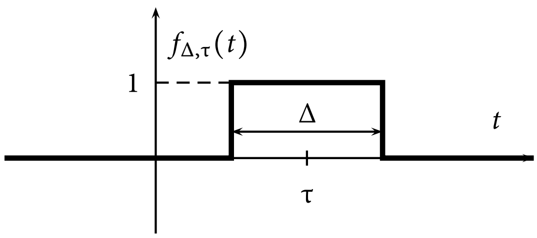


Figure 2

1. Représenter la fonction $f_{\Delta,0}$.
2. *Calculer* la transformée de Fourier de $f_{\Delta,0}$.
3. *En déduire* la transformée de Fourier de $f_{\Delta,\tau}$ puis celle de $(t\, f_{\Delta,\tau})$
4. Représenter la fonction $(t\, f_{\Delta,\tau})$, puis la fonction $(t\, f_{\Delta,0})$.
5. Tracer la fonction $g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{\Delta,k\,\tau}$ pour $\tau > \dfrac{\Delta}{2}$.
6. Déduire de la question 3 une écriture possible de la transformée de Fourier de g, sous la forme d'une sommation que l'on ne cherchera pas à calculer.
7. Montrer que l'on peut écrire $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{\Delta,k\,\tau} = \dfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n\,\tau} \sin\left(\dfrac{n\,\Delta}{2}\right) \cos\left(\dfrac{2\,\pi}{\tau}\,n\,t\right)$