Correction du partiel

Exercice 1 1. i) Puisque s^2+2s+5 est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}$ (car $\Delta = 4-20<0$), on a :

$$f(s) = \frac{8s^2-4}{s^2(s^2+2s+5)(s-1)^4} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2} + \frac{E}{(s-1)^3} + \frac{F}{(s-1)^4} + \frac{Gs+H}{s^2+2s+5}$$

avec A, B, C, D, E, F, G et H, des constantes réelles.

ii) Puisque s^2+s+6 est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}$ (car $\Delta = 1-24<0$) et $s^2+s-6=(s-2)(s+3)$, on a :

$$g(x) = \frac{2s^3}{(s^2+s+6)^2(s^2+s-6)^2} = \frac{As+B}{s^2+s+6} + \frac{Cs+D}{(s^2+s+6)^2} + \frac{E}{s-2} + \frac{F}{(s-2)^2} + \frac{G}{s+3} + \frac{H}{(s+3)^2}$$

avec A, B, C, D, E, F, G et H, des constantes réelles.

2. i) On sait que si $F(s)$ est la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, alors la fonction $F(s-a)$ est la transformée de Laplace de $e^{at}f(t)$. Ici, la transformée de Laplace de $\cos(at)$ est $\dfrac{s}{s^2+a^2}$; on en déduit alors que la transformée de Laplace de $e^{bt}\cos(at)$ est bien $\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$. Même chose pour $e^{bt}\sin(at)$.

ii) On note que $\dfrac{Gs+H}{s^2+2s+5} = G\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4} + \dfrac{H-G}{2}\dfrac{2}{(s+1)^2+4}$ pour conclure que

$$f(t) = A + Bt + Ce^t + Dte^t + \frac{E}{2}t^2e^t + \frac{F}{6}t^3e^t + Ge^{-t}\cos(2t) + \frac{H-G}{2}e^{-t}\sin(2t)$$

Exercice 2

1.i) On cherche A et B tels que $G(s) = \dfrac{s-10}{s^2-3s+2} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s-2}$

- $\times(s-1)$ puis $s=1$: on trouve $A=9$
- $\times(s-2)$ puis $s=2$: on trouve $B=-8$

Conclusion : $G(s) = \dfrac{9}{s-1} - \dfrac{8}{s-2}$

ii) On cherche A, B, C et D tels que $H(s) = \dfrac{40}{(s^2-3s+2)(s^2-6s+13)} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s-2} + \dfrac{Cs+D}{s^2-6s+13}$

- $\times(s-1)$ puis $s=1$: on trouve $A=-5$
- $\times(s-2)$ puis $s=2$: on trouve $B=8$
- $\times s$ puis on fait tendre s vers $+\infty$: on trouve $0=A+B+C$, i.e. $C=-A-B=5-8=-3$.
- $H(0) = 40/26 = -A - B/2 + D/13$, d'où $2D = 40+26A+13B = 40-130+104 = 14$, i.e. $D=7$

Conclusion : $H(s) = -\dfrac{5}{s-1} + \dfrac{8}{s-2} - \dfrac{3s-7}{s^2-6s+13}$

2.i) En posant $Y = \mathcal{L}(y)$, l'équation (E) avec $y(0)=y'(0)=0$ entraîne $s^2Y(s) - 3sY(s) + 2Y(s) = 20\mathcal{L}(e^{3t}sin(2t))(s) = 20\dfrac{2}{(s-2)^2+4}$, d'où $Y(s) = 20\dfrac{2}{(s-3)^2+4} \times \dfrac{1}{s^2-3s+2}$, soit encore

$$Y(s) = \frac{40}{(s-1)(s-2)(s^2-6s+13)} = H(s)$$

D'après la question précédente, on a donc $Y(s) = -\dfrac{5}{s-1} + \dfrac{8}{s-2} - \dfrac{3s-7}{(s-3)^2+4}$ ou

$$Y(s) = -\frac{5}{s-1} + \frac{8}{s-2} - 3\frac{s-3}{(s-3)^2+4} - \frac{2}{(s-3)^2+4}$$

On en déduit que la solution cherchée est

$$y(t) = -e^{3t}(\sin(2t) + 3\cos(2t)) - 5e^t + 8e^{2t}$$

ii) L'équation (E) avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -7$ entraîne $s^2Y(s) - s + 7 - 3sY(s) + 3 + 2Y(s) = 20\mathcal{L}(e^{3t}sin(2t))(s) = 20\dfrac{2}{(s-2)^2+4}$, d'où $Y(s) = 20\dfrac{2}{(s-3)^2+4} \times \dfrac{1}{s^2-3s+2} + \dfrac{s-10}{s^2-3s+2}$, soit encore

$$Y(s) = \frac{40}{(s-1)(s-2)(s^2-6s+13)} + \frac{s-10}{s^2-3s+2} = H(s) + G(s)$$

Sachant, d'après la question 1., que $H(s) = -\dfrac{5}{s-1} + \dfrac{8}{s-2} - \dfrac{3s-7}{s^2-6s+13}$ et $G(s) = \dfrac{s-10}{(s-1)(s-2)} = \dfrac{9}{s-1} - \dfrac{8}{s-2}$, on a donc

$$Y(s) = -\frac{5}{s-1} + \frac{8}{s-2} - \frac{3s-7}{(s-3)^2+4} + \frac{9}{s-1} - \frac{8}{s-2}$$

i.e.

$$Y(s) = \frac{4}{s-1} - 3\frac{s-3}{(s-3)^2+4} - \frac{2}{(s-3)^2+4}$$

On en déduit que la solution cherchée est

$$y(t) = -e^{3t}(\sin(2t) + 3\cos(2t)) + 4e^t$$