Brève correction du Partiel 2009 L3 CBPS

Exercice 1 :

1°/ $F(s) = \dfrac{3}{(s-1)(s+2)^3} = \dfrac{a}{s-1} + \dfrac{b}{s+2} + \dfrac{c}{(s+2)^2} + \dfrac{d}{(s+2)^3}$

On détermine les coefficients a, b, c et d :

Pour a : on multiplie par $s-1$ puis on fait $s=1 \rightsquigarrow a = \frac{1}{9}$

Pour d : on multiplie par $(s+2)^3$ puis on fait $s=-2 \rightsquigarrow d = -1$

Pour b : on multiplie par $(s+2)$ puis on fait $s \to +\infty \rightsquigarrow b = -\frac{1}{9}$

Pour c : on fait $s=0 \rightsquigarrow c = -\frac{1}{3}$

On obtient donc $F(s) = \dfrac{1}{9}\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{9}\dfrac{1}{s+2} - \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(s+2)^2} - \dfrac{1}{(s+2)^3}$

2°/ Etape 1 : On applique la transformée de Laplace à l'équation

$$\left(s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)\right) + \left(s Y(s) - y(0)\right) - 2Y(s) = \frac{3}{(s+2)^2}$$

avec $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$.

Ceci équivaut à $Y(s) = \dfrac{3}{(s^2+s-2)(s+2)^2} = \dfrac{3}{(s+2)^3(s-1)}$

Etape 2 : On cherche la transformée inverse

On a $Y(s) = \dfrac{3}{(s-1)(s+2)^3} = \dfrac{1}{9}\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{9}\dfrac{1}{s+2} - \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(s+2)^2} - \dfrac{1}{(s+2)^3}$

donc $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t) = \dfrac{1}{9}e^{t} - \dfrac{1}{9}e^{-2t} - \dfrac{1}{3}te^{-2t} - \dfrac{1}{2}t^2e^{-2t}$

3°/ Etape 1 : On applique $\mathcal{L}$

$$\left(s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)\right) + \left(s Y(s) - y(0)\right) - 2Y(s) = \frac{3}{(s+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (s^2+s-2)\,Y(s) - s = \frac{3}{(s+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s+2)^3} + \frac{s}{(s-1)(s+2)}$$

Etape 2 : On applique $\mathcal{L}^{-1}$

On a vu au 2°/ que $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3}{(s-1)(s+2)^3}\right)(t) = \dfrac{e^t}{9} - \dfrac{e^{-2t}}{9} - \dfrac{te^{-2t}}{3} - \dfrac{t^2e^{-2t}}{2}$

Il reste à trouver $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s-1)(s+2)}\right)$.

Un petit calcul donne $\dfrac{s}{(s-1)(s+2)} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{s+2}$

On a donc $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)(s+2)}\right)(t) = \frac{e^t}{3} + \frac{2}{3}e^{-2t}$

Par conséquent, la solution de l'équation différentielle est $\underline{y(t) = \frac{4}{9}e^t + \frac{5}{9}e^{-2t} - \frac{te^{-2t}}{3} - \frac{t^2e^{-2t}}{2}}$

Exercice 2 : On commence par décomposer $G(s)$ en éléments simples. Comme le polynôme s^2+2s+5 est irréductible ($\Delta = -16 < 0$) on peut écrire $G(s) = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+2s+5}$

Pour déterminer a : On multiplie par s puis on fait $s=0$
$\rightsquigarrow a = -\frac{2}{5}$

Pour déterminer b : On multiplie par s puis on fait $s \to +\infty$
$\rightsquigarrow a+b = 0$ donc $b = \frac{2}{5}$

Pour déterminer c : On fait $s=1$ $\rightsquigarrow c = \frac{9}{5}$

On en déduit que $G(s) = -\frac{2}{5}\frac{1}{s} + \frac{1}{5}\frac{2s+9}{s^2+2s+5}$

Maintenant, on sait que $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)(t) = 1$. Il ne reste plus qu'à déterminer $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+9}{s^2+2s+5}\right)(t)$.

On écrit $\frac{2s+9}{s^2+2s+5} = \frac{2s+9}{(s+1)^2+4} = \frac{2(s+1)+7}{(s+1)^2+4} = 2\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{7}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4}$

On en déduit que $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+9}{s^2+2s+5}\right)(t) = 2e^{-t}\cos(2t) + \frac{7}{2}e^{-t}\sin(2t)$

Au final, on obtient

$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))(t) = \underline{-\frac{2}{5} + e^{-t}\left(\frac{2}{5}\cos(2t) + \frac{7}{10}\sin(2t)\right)}$

Exercice 3 :

1°/ $\cos^4 t = \frac{\cos(4t)}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{3}{8}$

donc $\mathcal{L}(\cos^4 t)(s) = \frac{1}{8}\frac{s}{s^2+16} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{8}\frac{1}{s}$

2°/ D'après la Propriété 6, on a $\mathcal{L}(t\cos^4 t)(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\cos^4 t)(s)$

d'où $\mathcal{L}(t\cos^4 t)(s) = -\frac{1}{8}\frac{1\times(s^2+16) - s\times 2s}{(s^2+16)^2} - \frac{1}{2}\frac{1\times(s^2+4) - s\times(2s)}{(s^2+4)^2} - \frac{3}{8}\times\left(-\frac{1}{s^2}\right)$

c'est-à-dire $\mathcal{L}(t\cos^4 t)(s) = -\frac{1}{8}\frac{16-s^2}{(16+s^2)^2} - \frac{1}{2}\frac{4-s^2}{(4+s^2)^2} + \frac{3}{8s^2}$