Licence Pluridisciplinaire – Mathématiques – mercredi 5 janvier 2011
Examen d'Algèbre – Deux heures
Les notes de cours et de travaux dirigés sont autorisées

Exercice 1 : la duplication du cube

On considère un cube $\mathcal{C} = ABCDEFGH$ dans l'espace affine euclidien usuel, de côté de longueur $AB = a > 0$. On se pose la question de savoir si l'on peut construire un cube $\mathcal{C}'$ à la règle et au compas dont le volume est le double de celui de $\mathcal{C}$.

1. Montrer que ce problème admet une solution si et seulement si $\sqrt[3]{2}$ est un nombre complexe constructible.

2. Montrer que ce nombre n'est pas constructible. (On pourra considérer le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ sur $\mathbb{Q}$.)

Exercice 2 : extensions de $\mathbb{Q}$

Soit $P = X^6 + X^5 - X^3 - 3X^2 - 2X - 2$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par $X^2 + X + 1$ et montrer que le quotient est $Q = X^4 - X^2 - 2$. Quel est le reste ?

2. Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $X^2 + X + 1$. En déduire que P a deux racines complexes conjuguées $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Indiquer pourquoi ces nombres sont constructibles à la règle et au compas.

3. Factoriser $Q = X^4 - X^2 - 2$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ (On pourra remarquer que $Q \in \mathbb{Z}[X^2]$). En déduire les facteurs irréductible de Q sur $\mathbb{Q}$.

4. En déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

5. Montrer que $X^2 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. En déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

6. Soit $\gamma = \sqrt{2} + i \in \mathbb{C}$.

6.1. Montrer que $\mathbb{Q}[\gamma]$ est une extension de $\mathbb{Q}$.

6.2. Montrer que le polynôme minimal de γ sur $\mathbb{Q}$ est $X^4 - 2X^2 + 9$.

6.3. En déduire qu'une base de $\mathbb{Q}[\gamma]$ sur $\mathbb{Q}$ est $(1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3)$. En déduire que $[\mathbb{Q}[\gamma] : \mathbb{Q}] = 4$.

6.4. Montrer que $\mathbb{Q}[\gamma] = \mathbb{Q}[i, \sqrt{2}]$. Montrer qu'une base de $\mathbb{Q}[i, \sqrt{2}]$ sur $\mathbb{Q}$ est $(1, \sqrt{2}, i, i\sqrt{2})$. Écrire la matrice de la base $(1, \sqrt{2}, i, i\sqrt{2})$ dans la base $(1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3)$.

Exercice 3 : extensions algébriques de degré arbitrairement grand

On se donne un entier $n \geq 2$. Soit $P_n = X^n - 2$.

1. Trouver les n racines complexes $z_0, \dots, z_{n-1}$ de P_n. En déduire la décomposition de P en n facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$.

2. On considère une partie $\mathcal{P} \subseteq \{z_0, \dots, z_{n-1}\}$. Montrer que le polynôme

$$\prod_{z \in \mathcal{P}} (X - z)$$

est dans $\mathbb{Z}[X]$ si et seulement si $\mathcal{P} = \{z_0, \dots, z_{n-1}\}$. (On pourra examiner le coefficient constant du polynôme.)

3. En déduire que P_n est irréductible sur $\mathbb{Z}$, puis sur $\mathbb{Q}$.

4. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un nombre algébrique z tel que

$$[\mathbb{Q}[z] : \mathbb{Q}] = n.$$