Licence Pluridisciplinaire – Mathématiques
Devoir d'algèbre
A rendre mardi 9 novembre

Exercice 1. Soit $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{m + n\sqrt{3} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{m + n\sqrt{5} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ sont des anneaux commutatifs intègres.

2. L'objet de cette question est de montrer que ces deux anneaux ne sont pas isomorphes. Pour cela, on suppose, par l'absurde, qu'il existe un isomorphisme d'anneaux $f : \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

2.1. Montrer que $f(n) = n$ pour tout entier n.

2.2. Montrer que $f(\sqrt{3}) \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

2.3. Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Conclure.

Exercice 2. L'objet de cet exercice est l'étude d'une classe de nombres premiers. On pourra s'inspirer de la démonstration du cours par l'absurde de l'infinité des nombres premiers.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier impair. Que peut-on dire de $n \bmod 4$?

2. Soit S l'ensemble des nombres entiers de la forme $4n + 1$. Montrer que S est stable par multiplication.

3. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4m + 3$. [On pourra raisonner par l'absurde.]

Exercice 3. Soit $n \geq 2$. Montrer que $x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ n'est pas un entier.