Séries entières et fonctions holomorphes

Denis-Charles Cisinski

Notes de cours pour la préparation au concours de l'agrégation de mathématiques, Université Paul Sabatier, automne 2012

Table des matières

Préambule

Ces notes traitent, pour l'essentiel, de la théorie des fonctions holomorphes, c'est-à-dire des fonctions dérivables à une variable au sens complexe, comme par exemple les fonctions développables en séries entières. Mis à part les erreurs et les imprécisions, on ne trouvera rien d'original ici. On suivra pour l'essentiel la présentation de Cartan [**Car61**], avec pas mal d'emprunts à Rudin [**Rud98**]. En particulier, l'accent est mis sur le fait qu'une forme différentielle ω admet localement une primitive si et seulement si, pour tout lacet γ homotope à un chemin constant, on a

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

Le théorème principal est que, pour toute fonction continue f, holomorphe en chaque point, sauf peut-être en quelques points isolés, la forme différentielle $\omega = f(z)\mathrm{d}z$ a justement cette propriété. La plupart des résultats fondamentaux de la théorie des fonctions holomorphes en découlent : la formule intégrale de Cauchy, l'existence d'une primitive holomorphe sur un ouvert simplement connexe, l'analycité des fonctions holomorphes, le principe du maximum, le théorème des résidus. On étudiera par ailleurs l'espace vectoriel topologique des fonctions holomorphes. La compréhension des sous-espaces compacts en tant que fermés bornés (théorème de Montel) est essentiellement le fruit de la conjonction du principe du maximum et du théorème d'Ascoli. Ce petit passage par l'analyse fonctionnelle ouvre la voie pour une preuve du théorème de la représentation conforme de Riemann : un ouvert simplement connexe du plan complexe est soit le plan tout entier, soit l'image par une transformation holomorphe du disque ouvert unité. En particulier, le groupe des automorphismes holomorphes d'un ouvert simplement connexe du plan complexe est soit celui des transformations affines complexes, soit celui des homographies. Autrement dit, dans un ouvert simplement connexe du plan complexe, seules deux géométries peuvent s'incarner via l'analyse complexe : la géométrie euclidienne ou bien la géométrie hyperbolique.

Dans ce qui suit, on verra le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes comme un corps de rupture du polynôme $X^2 + 1$ au-dessus du corps

$\mathbf{R}$ des nombres réels, muni d'un choix d'une racine carrée de -1, notée i. En particulier, $\{1, i\}$ forme une base de $\mathbf{C}$ en tant que $\mathbf{R}$-espace vectoriel. On désigne comme de coutume par $z \mapsto \bar{z}$ l'unique endomorphisme non trivial de $\mathbf{R}$-algèbre de $\mathbf{C}$, lequel est appelé le morphisme de conjugaison. Le module d'un nombre complexe z, noté $|z|$, est la racine carrée de $z\bar{z}$. Mis à part les propriétés élémentaires de la conjugaison complexe, on ne supposera rien de connu sur les nombres complexes. Néanmoins, on supposera connues les bases de la topologie générale et de l'analyse réelle : fonctions continues, espaces métriques, espaces compacts, espaces séparés, espaces connexes, fonctions différentiables sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$, théorie de l'intégration (pour les fonctions continues par morceaux), théorèmes de passage à la limite sous le signe somme et leurs petits compagnons ; par exemple, on pourra consulter pour cela les volumes du traité de Bernard Gostiaux [**Gos93a, Gos93b, Gos93c**].

Faute de temps, un aspect à la fois fondamental et magnifique de la théorie des fonctions analytiques complexes, à savoir le lien avec la théorie des nombres, n'apparaît pas dans ce cours. Pour palier ce manque cruel, on pourra consulter le livre de Colmez [**Col11**].

CHAPITRE 1

Séries entières et fonctions analytiques

1. Fonctions développables en séries entières

Définition 1.1.1. On appelle *série entière* une série de fonctions de la forme
$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$$
où les coefficients a_n sont des nombres complexes et où z est une variable complexe. Le *rayon de convergence* d'une telle série est le nombre réel
$$\mathrm{R} = \sup\Big\{ r\in \mathbf{R} \;\Big|\; r\geqslant 0 \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n < +\infty \Big\}.$$
On dit qu'une série entière est *convergente* si son rayon de convergence est strictement positif.

Lemme 1.1.2 (Abel). *Soit Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. On se donne des nombres réels $0 < r < r_0$ et $\mathrm{M} > 0$ tels que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on ait*
$$|a_n| r_0^n < \mathrm{M}.$$
Alors la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement (et donc uniformément) sur le disque $|z| \leqslant r$.

Démonstration. Lorsque $|z| \leqslant r$, on a les majorations
$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n < \mathrm{M}\Big(\frac{r}{r_0}\Big)^n.$$
On en déduit le lemme, puisque la série $\sum_{n\geqslant 0} (\frac{r}{r_0})^n$ converge. □

Proposition 1.1.3. *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Pour tout $r < \mathrm{R}$, cette série converge normalement pour $|z| \leqslant r$. En particulier, pour tout $z \in \mathbf{C}$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument si $|z| < \mathrm{R}$. En outre, elle diverge si $|z| > \mathrm{R}$.*

Démonstration. Si $r < \mathrm{R}$, on peut trouver $r_0 \in]r, \mathrm{R}[$, et on applique le théorème d'Abel avec $\mathrm{M} = 1 + \sum_{n\geqslant 0} |a_n| r_0^n$, ce qui prouve la première assertion. Si $|z| > \mathrm{R}$, la suite des $|a_n z^n|$ prend des valeurs arbitrairement grandes (car sinon, on pourrait appliquer le lemme d'Abel, et la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ serait convergente pour $\mathrm{R} < r < |z|$). □

Corollaire 1.1.4. *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *Alors la fonction*

$$z \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$$

est continue sur le disque ouvert, de centre 0 *et de rayon* R.

Proposition 1.1.5 (Formule d'Hadamard). *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *Alors*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Pour une preuve, on renvoie par exemple à [**Car61**, page 20].

Exercice 1.1.6 (Règle de d'Alembert). Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Remarque 1.1.7. La proposition 1.1.3 n'affirme rien sur la convergence au bord du disque $|z| = R$. Quitte à faire opérer une rotation adéquate, il suffit de comprendre ce qui se passe lorsque z tend vers R. On a alors le

Théorème 1.1.8 (Abel). *Soit* $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *On suppose que la série numérique* $\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n$ *converge. Alors on a :*

$$\lim_{\substack{x\to R\\ x<R}} f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n R^n.$$

Démonstration. On peut supposer que $0 < R < +\infty$. Quitte à procéder à un changement de variable adéquat, on peut supposer que $R = 1$. Quitte à modifier le terme a_0, on peut aussi supposer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n = 0$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ les sommes partielles, $n \geqslant 0$. On a alors, pour tout $N \geqslant 0$ et pour $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{N} (S_n - S_{n-1}) z^n = S_N z^{N+1} + \sum_{n=0}^{N} S_n (z^n - z^{n+1}) = S_N z^{N+1} + (1-z) \sum_{n=0}^{N} S_n z^n.$$

La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée (puisque convergente), de sorte que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} S_n z^n$ a un rayon de convergence $\geqslant 1$. Par passage à la limite, on obtient donc :

$$f(z) = (1-z) \sum_{n\geqslant 0} S_n z^n.$$

Chosissons $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que $|S_n| < \varepsilon$ pour tout $n > n_0$. Posons

$$C = \sup_{|z|\leqslant 1} \left| \sum_{n=0}^{n_0} S_n z^n \right|.$$

On a alors

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leqslant \left|(1-z)\sum_{n=0}^{n_0} S_n z^n + (1-z)\sum_{n>n_0} S_n z^n\right| \\ &\leqslant |1-z|\left(C + \left|\sum_{n>n_0} S_n z^n\right|\right) \\ &\leqslant |1-z|\left(C + \frac{\varepsilon |z|^{n_0+1}}{1-|z|}\right).\end{aligned}$$

Si $z = x$ est un réel > 0, on en déduit que

$$|f(x)| \leqslant (1-x)C + \varepsilon.$$

Lorsque x est proche de 1, on peut imposer $(1-x)C < \varepsilon$. Dans ce cas, on a donc $|f(x)| < 2\varepsilon$. Il s'en suit que $f(x)$ tend vers 0 lorque x tend vers 1. □

Exercice 1.1.9. Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R < +\infty$, dont les coefficients a_n sont de réels positifs. On suppose que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n$ diverge. Montrer que

$$\liminf_{\substack{x\to R\\ x<R}} f(x) = +\infty.$$

En déduire que

$$\lim_{\substack{x\to R\\ x<R}} f(x) = +\infty.$$

Le fait qu'une série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge peut être source de beaucoup d'informations sur le comportement asymptotique des fonctions analytiques. Un exemple de résultat allant dans cette direction est le suivant.

Théorème 1.1.10 (Cesaro). *On considère deux séries entières $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ à coefficients réels, de rayon de convergence 1. On suppose que les coefficients b_n sont positifs et que la série $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ diverge. On pose enfin*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \textit{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,$$

et on suppose que $A_n \sim B_n$. Alors $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \in [0,1[$ tend vers 1 (en particulier, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge).

Démonstration. On pose

$$F(x) = \frac{f(x)}{1-x} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{g(x)}{1-x},$$

de sorte que

$$F(x) = \sum_{n\geqslant 0} A_n x^n \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n\geqslant 0} B_n x^n .$$

Il suffit de prouver que $F(x) \sim G(x)$ lorsque $x \in [0,1[$ tend vers 1. Soit $\varepsilon > 0$, et choisissons un entier n_0 tel que

$$(1-\varepsilon)B_n < A_n < (1+\varepsilon)B_n$$

lorsque $n > n_0$. Si on pose $h(x) = \sum_{n=0}^{n_0} A_n x^n$, on obtient donc

$$h(x) + (1-\varepsilon)\sum_{n>n_0} B_n x^n < F(x) < h(x) + (1-\varepsilon)\sum_{n>n_0} B_n x^n .$$

Posons $k(x) = \sum_{n=0}^{n_0} B_n x^n$. Comme $x \mapsto k(x) - h(x)$ est une fonction continue sur l'intervalle compact $[0,1]$, elle est bornée sur cet intervalle. Ce qui précède implique donc qu'il existe une constante (indépendantes de x) $C > 0$ telles que

$$-C + (1-\varepsilon)G(x) < F(x) < C + (1+\varepsilon)G(x).$$

On observe par ailleurs que $G(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x s'approche de 1 : comme la série $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ diverge, c'est une conséquence de l'exercice 1.1.9. On en déduit que

$$1-\varepsilon \leqslant \liminf_{x\to 1} \frac{F(x)}{G(x)} \leqslant \limsup_{x\to 1} \frac{F(x)}{G(x)} \leqslant 1+\varepsilon.$$

Comme on a pris $\varepsilon > 0$ quelconque, cela termine la preuve. □

Remarque 1.1.11. Pour quelques éléments supplémentaires concernant les développements asymptotiques (par exemple, pour voir des applications du théorème de Cesaro ci-dessus), on pourra consulter le chapitre III du livre de Dieudonné [**Die80**].

1.1.12. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières. Leur *somme* est la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n + \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n ,$$

et leur *produit* est la série entière

$$\Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n\Big) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n ,$$

où on a posé

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} .$$

Exercice 1.1.13. Les séries entières convergentes sont stables par somme et par produit. En outre, les opérations de somme et de produit des séries entières coïncident avec celles de somme et de produit de fonctions (lorsque cela a un sens, c'est-à-dire dans la situation où tous les termes convergent absolument).

Proposition 1.1.14. *Soit* $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. Alors le rayon de convergence de la série entière dérivée*

$$f'(z) = \sum_{n\geqslant 0} (n+1)a_{n+1}z^n$$

est R*. De plus, pour tout* $z \in \mathbf{C}$ *tel que* $|z| < \mathrm{R}$*, on a*

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Démonstration. Soit R' le rayon de convergence de f'. En appliquant la formule d'Hadamard (1.1.5), on voit immédiatement que $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$. En particulier, pour $0 < r < \mathrm{R}$, si on se restreint au disque fermé de centre 0 et de rayon r, ces deux séries convergent uniformément, et par les règles de commutation des limites au signe somme, on déduit la proposition. □

Définition 1.1.15. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Une fonction

$$f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$$

est *analytique* en un point a de U s'il existe une série entière convergente $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ telle que

$$f(z+a) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$$

au voisinage de 0. Une fonction *analytique* sur un ouvert du plan complexe est une fonction qui est analytique en tout point.

Exemple 1.1.16. Toute fonction polynômiale est analytique.

Remarque 1.1.17. Il résulte de l'exercice 1.1.13 que les fonctions analytiques sont stables par somme et par produit. Elles sont aussi stables par composition (voir par exemple [**Car61**, Chapitre I, § 2, Proposition 5.1] pour une preuve élémentaire). Toutes ces propriétés sont un corollaire de la théorie des fonctions holomorphes du point de vue de Cauchy, ce qui est le thème principal de ces notes.

2. Le principe des zéros isolés

Proposition 1.2.1. *Soit* $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *entière convergente. Si* $a_n \neq 0$ *pour un certain* $n \neq 0$*, alors il existe un voisinage* V *de* 0 *tel que* $f(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \mathrm{V} \setminus \{0\}$*.*

Démonstration. Soit n le plus petit entier tel que $a_n \neq 0$. Alors on peut écrire $f(z) = z^n g(z)$ avec g une série entière convergente telle que $g(0) = a_n \neq 0$. On conclut grâce à la continuité de g. □

Théorème 1.2.2 (Principe des zéros isolés). *Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe* U *de* **C**. *Si f n'est pas constante, alors les zéros de f sont isolés (c'est-à-dire que l'ensemble des points de* U *sur-lesquels f s'annule est un fermé discret).*

Démonstration. On se donne une suite $(u_n)_{\geqslant 0}$ de U qui converge vers un élément $a \in \mathrm{U}$, telle que $u_n \neq a$ pour tout n, et telle que $f(u_n) = 0$ pour tout n. Montrons qu'il existe un voisinage ouvert V de a tel que $f(z) = 0$ pour tout $z \in \mathrm{V}$. Il existe une série entière convergente $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ telle que

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n (z-a)^n$$

au voisinage de a. Si l'un au moins des coefficients a_n est non nul, la proposition 1.2.1 implique que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \neq a$ assez proche de a, ce qui est incompatible avec l'hypothèse faite sur la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$. Par conséquent, on a $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, et donc f est nulle au voisinage de a. Autrement dit, si A désigne l'ensemble des points de U sur lesquels f s'annule, et si A_c est le sous-ensemble des points d'accumulation de A, alors A_c est un ouvert de U. Comme A_c est trivialement fermé, il s'en suit, par connexité de U, que $\mathrm{A}_c = \mathrm{U}$ ou $\mathrm{A}_c = \varnothing$. □

Corollaire 1.2.3 (Principe du prolongement analytique). *Soit f et g deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe* U *de* **C**. *Si f et g coïncident sur une partie* A *de* U *ayant au moins un point d'accumulation, alors $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \mathrm{U}$.*

Démonstration. On applique le principe des zéros isolés à la fonction analytique $f - g$. □

3. Exponentielle

Définition 1.3.1. La *fonction exponentielle* est la fonction analytique sur **C** définie par la série entière

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$$

(dont le rayon de convergence est infini, comme on l'observe avec la règle de d'Alembert, par exemple).

Proposition 1.3.2. *Pour tous nombres complexes a et b, on a*

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

Démonstration. On vérifie en effet que

$$\Big(\sum_{n\geqslant 0}\frac{a^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0}\frac{b^n}{n!}\Big)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n_k)!}a^k b^{n-k}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(a+b)^n}{n!},$$

ces identifications formelles étant justifiées par la convergence absolue des séries considérées. □

Corollaire 1.3.3. *On a $e^0 = 1$ et, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a $e^z e^{-z} = 1$.*

Remarque 1.3.4. Les coefficients de la série exponentielle étant réels, $e^x \in \mathbf{R}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On note $e = e^1$.

Théorème 1.3.5. *La fonction exponentielle a les propriétés suivantes.*
(i) L'application $\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *est surjective.*
(ii) L'exponentielle est égale à sa propre dérivée.
(iii) La restriction de exp *aux nombres réels est une fonction à valeurs réelles strictement croissante telle que*

$$\lim_{x\to+\infty}\exp(x)=+\infty \quad et \quad lim_{x\to-\infty}\exp(x)=0.$$

(iv) Il existe un unique nombre réel positif π *tel que* $\exp(\frac{i\pi}{2}) = i$, *et tel que, pour tout* $z \in \mathbf{C}$, *on ait* $\exp(z) = 1$ *si et seulement si* $\frac{z}{2i\pi} \in \mathbf{Z}$.
(v) La fonction exp *est périodique de période* 2π.
(vi) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, *on a* $|e^{it}| = 1$.

Démonstration. La propriété (ii) résulte aussitôt de la proposition 1.1.14. Pour la propriété (iii), on observe que, pour tout nombre réel positif x, on a $1 + x \leqslant e^x$, ce qui permet de calculer la première limite ; la seconde limite s'en déduit, puisque $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ pour tout x. On prouve la propriété (vi) de la manière suivante. Soit $t \in \mathbf{R}$. On a alors (par observation des développements en série) :

$$\exp(-it)=\overline{\exp(it)}.$$

Cela implique que

$$|e^{it}|^2=e^{it}e^{-it}=1\,.$$

Montrons les propriétés (iv) et (v). Pour $t \in \mathbf{R}$, on *définit* $\cos t$ comme la partie réelle de e^{it} et $\sin t$ comme la partie imaginaire de e^{it}. On a donc, par définition,

$$e^{it}=\cos t+i\sin t\,.$$

Les fonctions réelles cos et sin sont dérivables sur $\mathbf{R}$, et on a les formules :

$$\cos'=-\sin \quad \text{et} \quad \sin=\cos\,.$$

La fonction cos a un développement en série de la forme

$$\cos t=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+\cdots$$

On en déduit que $\cos(2) < 0$. Comme $\cos(0) = 1$, il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que la fonction cos s'annule sur $[0, 2]$. On définit

$$\pi = \inf\left\{ t \in [0, +\infty[\;\middle|\; \cos\frac{t}{2} = 0 \right\}.$$

Vu que $\cos(0) = 1$, on a nécessairement $\pi > 0$. D'autre part, on a la formule $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, et donc on a nécessairement $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$. Or, par définition de π, on a $\sin'(t) = \cos(t) > 0$ pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Le fait que $\sin(0) = 0$ implique donc que $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Autrement dit, on a la formule

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i\,.$$

Cela implique aussitôt que

$$e^{i\pi} = -1 \quad \text{et} \quad e^{i2\pi} = 1\,.$$

Par conséquent, pour tout $z \in \mathbf{C}$ et tout entier $n \in \mathbf{Z}$, on a

$$e^{z+ni2\pi} = e^z (e^{i2\pi})^n = e^z\,,$$

ce qui prouve la propriété (v). Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $e^z = 1$. Montrons que $\frac{z}{2i\pi}$ est un nombre entier. On écrit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbf{R}$. On a alors $e^z = e^a e^{ib}$, de sorte que $e^a = |e^z| = 1$, ce qui implique que $a = 0$. Comme la fonction $t \mapsto e^{it}$ est 2π-périodique, pour prouver que $\frac{b}{2\pi}$ est un entier, il suffit de montrer que, pour tout $t \in]0, 2\pi[$, on a $e^{it} \neq 1$ (cela impliquera par ailleurs l'unicité de π, comme annoncé dans la propriété (iv)). Soit $t \in]0, 2\pi[$, et posons

$$e^{i\frac{t}{4}} = x + iy\,, \quad x, y \in \mathbf{R}\,.$$

Par définition de π, comme $\frac{t}{4} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a nécessairement $x > 0$ et $y > 0$. Le développement de $(x + iy)^4$ nous montre que la partie imaginaire de e^{it} est $4xy(x^2 - y^2)$. Autrement dit, pour que e^{it} soit un nombre réel, il faut et il suffit que $x^2 = y^2$. Or on a aussi la contrainte $x^2 + y^2 = 1$, et donc il faut $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mais alors $\cos t = -1$.

Il reste à prouver la propriété (i). Soit $z \in \mathbf{C} \smallsetminus \{0\}$. En posant $\rho = |z|$, on peut écrire $z = \rho u$ avec $|u| = 1$. La propriété (iii) et le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $\exp_{|\mathbf{R}}$ implique qu'il existe un unique nombre réel a tel que $e^a = \rho$. Pour conclure, il suffit donc de trouver un nombre réel b tel que $e^{ib} = u$ (et on posera alors $w = a + ib$, pour obtenir $e^w = z$). On pose $u = \alpha + i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. On distingue trois cas. Si $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$, comme $\alpha \leqslant 1$, le théorème des valeurs intermédiaires implique que $\alpha = \cos b$ pour un certain $b \in [0, \frac{\pi}{2}]$. D'autre part, on a

$$(\sin b)^2 = 1 - \alpha^2 = \beta^2\,,$$

et comme $\sin b \geqslant 0$, l'injectivité de la fonction $x \mapsto x^2$ sur les réels positifs implique que $\sin b = \beta$. On a donc bien $e^{ib} = u$ dans ce cas. Si

$\alpha < 0$ et $\beta \geqslant 0$, alors on applique ce qui précède à $-iu$. On trouve donc $b \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $-iu = e^{it}$. En posant $b = t + \frac{\pi}{2}$, on obtient de nouveau $e^{ib} = u$. Finalement, si $\beta < 0$, ce qui précède permet de trouver un réel t tel que $e^{it} = -u$, et donc, en posant $b = t + \pi$, on a encore $e^{ib} = u$. $\square$

Remarque 1.3.6. L'exponentielle définit donc un morphisme de groupes surjectif

$$\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$$

de noyau $2\pi i\mathbf{Z}$. De même, si on note

$$\mathbf{U} = \left\{ z \in \mathbf{C} \;\middle|\; |z| = 1 \right\}$$

le cercle unité, la fonction $t \mapsto e^{it}$ définit un morphisme de groupes surjectif $\mathbf{R} \to \mathbf{U}$ de noyau $2\pi\mathbf{Z}$. On en déduit un isomorphisme de groupes

$$\varphi : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to \mathbf{U}.$$

Exercice 1.3.7. Montrer que, lorsqu'on le munit de la topologie quotient, l'espace $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ est compact. En déduire que l'isomorphisme de groupes $\varphi : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to \mathbf{U}$ est aussi un homéomorphisme.

Remarque 1.3.8. L'application inverse φ^{-1} est notée classiquement

$$\arg : \mathbf{U} \to \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}.$$

Plus généralement, pour un nombre complexe non nul z, on pose

$$\arg(z) = \arg\left(\frac{z}{|z|}\right).$$

CHAPITRE 2

Formes différentielles complexes

1. Formes différentielles de degré 1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. On désigne par $E^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E, \mathbf{C})$ l'espace vectoriel des applications $\mathbf{R}$-linéaires de E vers $\mathbf{C}$.

Définition 2.1.1. On appelle *forme différentielle* (complexe de degré 1) sur un ouvert U de E une application continue

$$\omega : U \to E^\vee.$$

Une forme différentielle ω sur U est dite de classe C^r si l'application $\omega : U \to E^\vee$ a cette propriété ($r \geqslant 0$).

Exemple 2.1.2. Soit $f : U \to \mathbf{C}$ une application de classe C^{r+1}. Pour chaque point x de U, la différentielle $\mathrm{d}_x f$ de f au point x définit une application $\mathbf{R}$-linéaire encore notée par abus

$$\mathrm{d}_x f : E \to \mathbf{C}, \ u \mapsto \mathrm{d}_x f(u).$$

Cela définit une forme différentielle $\omega = \mathrm{d}f$ de classe C^r

$$\mathrm{d}f : U \to E^\vee, \ x \mapsto \mathrm{d}_x f,$$

appelée la *différentielle de f*.

Notations 2.1.3. On désignera par $\mathscr{C}^r(U)$ l'ensemble des fonctions $U \to \mathbf{C}$ de classe C^r, et par $\Omega^{1,r}(U)$ celui des formes différentielles de classe C^r sur U. L'exemple ci-dessus définit une application $\mathbf{C}$-linéaire

$$\mathrm{d} : C^{r+1}(U) \to \Omega^{1,r}(U).$$

L'ensemble de fonctions $\mathscr{C}^r(U)$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbf{C}$-algèbre ; on dispose en outre d'une multiplication

$$\mathscr{C}^r(U) \times \Omega^{1,r}(U) \to \Omega^{1,r}(U), \ (f, \omega) \mapsto f\omega$$

définie par $(f\omega)(x) = f(x)\omega(x)$ pour tout $x \in U$.

Exercice 2.1.4. Montrer que cette multiplication est bien définie, et vérifier la formule de Leibniz : pour tous $f, g \in C^{r+1}(U)$, on a

$$\mathrm{d}(fg) = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f.$$

2.1.5. Considérons une base $e_1, \dots, e_n$ de E. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons $x_i : U \to \mathbf{C}$ la restriction à U de l'unique application $\mathbf{R}$-linéaire $E \to \mathbf{C}$

qui envoie e_i sur 1 et e_j sur 0 pour $j \neq i$. On a donc en particulier une famille de formes différentielles

$$\mathrm{d}x_i : \mathrm{U} \to \mathrm{E}^\vee, \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

PROPOSITION 2.1.6. *L'ensemble* $\Omega^{1,r}(\mathrm{U})$ *est un* $\mathscr{C}^r(\mathrm{U})$*-module libre de rang n, avec pour base la famille* $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$*. Autrement dit, pour toute forme différentielle* $\omega \in \Omega^{1,r}(\mathrm{U})$*, il existe un unique n-uplet*

$$(f_1, \ldots, f_n) \in \mathscr{C}^r(\mathrm{U})^n$$

tel que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathrm{d}x_i .$$

La démonstration est laissée à titre d'exercice (facile).

REMARQUE 2.1.7. Si $\omega = \mathrm{d}f$ pour une foncion différentiable f, on a

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$$

où les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont les dérivées partielles de f.

DÉFINITION 2.1.8. Soit ω une forme différentielle de classe C^r sur U. Une *primitive de* ω est une fonction $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ de classe C^{r+1} telle que $\mathrm{d}f = \omega$. Une forme différentielle est dite *exacte* si elle admet une primitive.

PROPOSITION 2.1.9. *Soit* ω *une forme différentielle de classe* C^r *sur* U. *Si* f *est une primitive de* ω *en tant que forme différentielle de classe* C^0, *alors* f *est une fonction de classe* C^{r+1}

DÉMONSTRATION. On peut choisir une base de E, de sorte que la différentielle $\mathrm{d}f$ s'écrive comme combinaison linéaire de ses dérivées partielles : les dérivées partielles de f sont les coordonnées de $\omega = \mathrm{d}f$ en tant qu'élément du $\mathscr{C}^r(\mathrm{U})$-module libre $\Omega^{1,r}(\mathrm{U})$ dans la base des $\mathrm{d}x_i$ (cf. proposition 2.1.6). Or la proposition 2.1.6 nous assure que ω est une combinaison linéaire dont les coefficients sont des fonctions de classe C^r. Cela signifie donc que les dérivées partielles de f sont toutes de classe C^r, d'où il résulte que f est une fonction de classe C^{r+1}. □

EXERCICE 2.1.10. Montrer que la primitive d'une forme différentielle est déterminée à une fonction constante près : si U est connexe, et si f et g sont deux fonctions différentiables sur U telles que $\mathrm{d}f = \mathrm{d}g$, alors $f - g$ est une fonction constante.

2. Image réciproque de formes différentielles

Considérons à présent deux espaces vectoriels de dimension finie E et F et deux ouverts $U \subset E$ et $V \subset F$.

DÉFINITION 2.2.1. Soit $\varphi : U \to V$ une application de classe C^{r+1}. Pour toute forme différentielle $\omega \in \Omega^{1,r}(V)$, on définit une forme différentielle $\varphi^*(\omega)$ sur U par la formule

$$\varphi^*(\omega)(x) = \omega(\varphi(x)) \circ \mathrm{d}_x\varphi$$

pour tout $x \in U$. On dit que $\varphi^*(\omega) \in \Omega^{1,r}(U)$ est l'*image réciproque de* ω *par* φ.

EXERCICE 2.2.2. Vérifier que $\varphi^*(\omega) \in \Omega^{1,r}(U)$.

EXERCICE 2.2.3. Étant donnée une fonction $f : U \to \mathbf{C}$ de classe C^{r+1}, l'*image réciproque de* f *par* φ, notée $\varphi^*(f)$, est définie par

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi.$$

Montrer que

$$\mathrm{d}(\varphi^*(f)) = \varphi^*(\mathrm{d}f)$$

pour tout $f \in C^{r+1}(U)$.

EXERCICE 2.2.4. Soient U, V et W trois ouverts respectifs des espaces vectoriels E, F et G, et supposons données deux fonctions de classe C^r

$$\varphi : U \to V \quad \text{et} \quad \psi : V \to W.$$

Démontrer que

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

3. Intégrales curvilignes

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $U \subset E$ un ouvert.

DÉFINITION 2.3.1. Un *chemin* dans U est la donnée d'une application continue $\gamma : [0,1] \to U$. Le point $\gamma(0)$ est appelé l'*origine* de γ, et le point $\gamma(1)$ l'*extrémité*.

On dit que γ est *de classe* C^1 s'il est la restriction à $[0,1]$ d'une application de classe C^1, encore notée par abus γ, d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbf{R}$ contenant $[0,1]$ vers U.

DÉFINITION 2.3.2. Soient $\gamma : [0,1] \to U$ un chemin de classe C^1 et ω une forme différentielle sur U. L'*intégrale de* ω *le long du chemin* γ est le nombre complexe

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\mathrm{d}t.$$

Remarque 2.3.3. Sous les hypothèses de la définition ci-dessus, on peut supposer que γ est la restriction d'une fonction de classe C^1 $\gamma : I \to U$, où I est un intervalle ouvert contenant 0 et 1. On dispose donc d'un forme différentielle $\gamma^*(\omega)$ sur I. D'après la proposition 2.1.6, il existe une unique application continue $f : I \to \mathbf{C}$ telle que $\gamma^*(\omega) = f\,dt$. Cette application f est tout-à-fait explicite : on a $f(t) = \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))$. En particulier, on a alors l'égalité

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \gamma^*(\omega).$$

Exercice 2.3.4. Démontrer les propriétés suivantes.

(i) Soient U et V deux ouverts respectifs d'espaces vectoriels réels de dimension finie E et F. On considère un chemin $\gamma : [0,1] \to U$ de classe C^1 et une application $\varphi : U \to V$ de classe C^1. Alors, pour toute forme différentielle ω sur V, on a

$$\int_\gamma \varphi^*(\omega) = \int_{\varphi\circ\gamma} \omega.$$

(ii) Comme cas particulier de la propriété (i), on voit que l'intégrale ne dépend pas des reparamétrisations des chemins, du moins lorsque l'on ne change pas l'origine ni l'extrémité. Autrement dit, si $\gamma : [0,1] \to U$ est un chemin de classe C^1 et si $\tau : [0,1] \to [0,1]$ est une application de classe C^1 telle que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$, alors, pour toute forme différentielle $\omega \in \Omega^{1,r}(U)$, on a

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma\circ\tau} \omega.$$

Définition 2.3.5. Soient $\alpha : [0,1] \to U$ et $\beta : [0,1] \to U$ deux chemins dans U, tels que $\alpha(1) = \beta(0)$. On définit alors le chemin *composé* $\beta\cdot\alpha : [0,1] \to U$ par la formule

$$\beta\cdot\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2.3.6. Démontrer les propriétés complémentaires suivantes.

(iii) Soient α et β deux chemins de classe C^1 dans U tels que $\alpha(1) = \beta(0)$. On suppose que le chemin compsé $\beta\cdot\alpha$ est de classe C^1 (ce n'est pas automatique du tout). Alors, pour toute forme différentielle ω sur U, on a

$$\int_{\beta\cdot\alpha} \omega = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega.$$

(iv) Soient α, β et γ trois chemins de classe C^1 dans U, tels que $\alpha(1) = \beta(0)$ et $\beta(1) = \gamma(0)$. On suppose que les chemins $\beta\cdot\alpha$, $\gamma\cdot\beta$,

$\gamma\cdot(\beta\cdot\alpha)$ et $(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha$ sont de classe C^1. Alors, pour toute forme différentielle ω sur U, on a

$$\int_{\gamma\cdot(\beta\cdot\alpha)}\omega=\int_{(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha}\omega.$$

(v) Soit γ un chemin de U. Le chemin *opposé à* γ est le chemin $\bar\gamma$ défini par

$$\bar\gamma(t)=\gamma(1-t)\,,\quad t\in[0,1].$$

Si γ est de classe C^1, alors il en est de même de $\bar\gamma$, et, pour toute forme différentielle ω sur U, on a

$$\int_{\bar\gamma}\omega=-\int_{\gamma}\omega.$$

La loi de composition des chemins (2.3.5) ne préserve pas la propriété d'être de classe C^1. C'est pourquoi on introduit la notion suivante.

Définition 2.3.7. On dit qu'un chemin $\gamma:[0,1]\to U$ est *de classe* C^1 *par morceaux* s'il existe une subdivision de l'intervalle $[0,1]$ de la forme $0=s_0<s_1<\cdots<s_m<s_{m+1}=1$ (avec $m\geqslant 0$), de sorte que l'application restreinte $\gamma_{|[s_i,s_{i+1}]}$ soit de classe C^1 pour tout indice i, $0\leqslant i\leqslant m$. Pour une forme différentielle ω sur U, on définit alors l'*intégrale de* ω *le long de* γ par la formule

$$\int_{\gamma}\omega=\sum_{i=0}^{m}\int_{\gamma_i}\omega,$$

où, pour $0\leqslant i\leqslant m$, on a posé

$$\gamma_i(t)=\gamma(ts_i+(1-t)s_{i+1})\,,\quad t\in[0,1].$$

(le nombre $\int_\gamma\omega$ ne dépend pas de la subdivision choisie, comme on le voit facilement à partir de la propriété (ii) de l'exercice 2.3.4 et de la propriété (iii) de l'exercice 2.3.6.)

Remarque 2.3.8. La loi de composition (partiellement définie) introduite au numéro 2.3.5 a la propriété d'être compatible aux chemins de classe C^1 par morceaux : si α et β sont deux chemins de classe C^1 par morceaux de U tels que $\alpha(1)=\beta(0)$, alors $\beta\cdot\alpha$ est encore de classe C^1 par morceaux.

Exercice 2.3.9. Démontrer que les propriétés des exercices 2.3.4 et 2.3.6 s'étendent aux chemins de classe C^1 par morceaux.

Proposition 2.3.10. *Soit* ω *une forme différentielle sur* U *admettant une primitive* f. *Pour tout chemin* γ *de* U *de classe* C^1 *par morceaux, on a*

$$\int_{\gamma}\omega=f(\gamma(1))-f(\gamma(0)).$$

Démonstration. On choisit une subdivision $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m < s_{m+1} = 1$ telle que l'application restreinte $\gamma_{|[s_i,s_{i+1}]}$ soit de classe C^1 pour tout i, et on note γ_i les chemins induits (en reprenant les notations de la définition 2.3.7). Pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant m$, on a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_i} \omega &= \int_{\gamma_i} \mathrm{d}f \\
&= \int_0^1 \gamma_i^*(\mathrm{d}f) \quad \text{(voir la remarque 2.3.3)} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}(\gamma_i^*(f)) \quad \text{(d'après l'exercice 2.2.4)} \\
&= \int_0^1 (f \circ \gamma_i)'(t)\mathrm{d}t \\
&= f(\gamma_i(1)) - f(\gamma_i(0)) \\
&= f(\gamma(s_{i+1}) - f(\gamma(s_i)).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \omega &= \sum_{i=0}^{m} \int_{\gamma_i} \omega \\
&= \sum_{i=0}^{m} f(\gamma(s_{i+1})) - f(\gamma(s_i)) \\
&= f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)),
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

4. Primitives

Comme de coutume, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension finie n, ainsi qu'un ouvert $U \subset E$.

Lemme 2.4.1. *Si* U *est connexe, pour tous points a et b de* U, *il existe un chemin γ de* U, *de classe* C^1 *par morceaux, tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.*

Démonstration. Fixons un point $a \in U$. Soit V l'ensemble des points $x \in U$ tel qu'il existe un un chemin γ de U, de classe C^1 par morceaux, vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = x$. Pour montrer le lemme, il suffit de vérifier que $U = V$. On voit que V est non vide, puisque $a \in V$. Comme U est connexe, il suffit donc de prouver que V est à la fois ouvert et fermé.

Montrons que V est ouvert. Soit $x \in V$, et considérons un chemin γ de U, de classe C^1 par morceaux, d'origine a et d'extrémité x. Soit $r > 0$ un nombre réel tel que $B(x, r) \subset U$. Montrons que $B(x, r) \subset V$. Si $y \in B(x, r)$, on définit un chemin θ de U par la formule

$$\theta(t) = (1 - t)x + ty.$$

Le chemin composé $\theta \cdot \gamma$ est de classe C^1 par morceaux, d'origine a et d'extrémité y, ce qui montre que $y \in V$.

Montrons que V est fermé. Soit x un point de l'adhérence de V dans U. On choisit $r > 0$ tel que $B(x, 2r) \subset U$. Comme x est dans l'adhérence de V, il existe $y \in V \cap B(x, r)$. Comme $x \in B(y, r) \subset U$, on a donc, par le même raisonnement que ci-dessus, $x \in V$. □

Définition 2.4.2. Un *lacet de* U est un chemin $\gamma : [0, 1] \to U$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Proposition 2.4.3. *Supposons* U *connexe et non vide, et considérons une forme différentielle* ω *de classe* C^r *sur* U. *On suppose donnée une famille* Γ *de chemins de classe* C^1 *par morceaux dans* U, *vérifiant les propriétés suivantes.*

(a) Si α *et* β *sont deux éléments de* Γ *tels que* $\alpha(0) = \beta(0)$, *on a* $\beta \cdot \bar{\alpha} \in \Gamma$ *(on rappelle que* $\bar{\alpha}$ *désigne le chemin opposé de* α*).*

(b) Pour tout point $x \in U$, *il existe* $r > 0$ *tel que, pour tout* $h \in B(0, r)$, *le chemin* $t \mapsto x + th$ *soit dans* Γ.

(c) Pour tous points x_0 *et* x_1 *de* U, *il existe un chemin* $\gamma \in \Gamma$ *tel que* $\gamma(0) = x_0$ *et* $\gamma(1) = x_1$.

(d) Pour tout lacet $\gamma \in \Gamma$, *on a*

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

On choisit alors un point a *de* U, *et, pour chaque point* x *de* U, *on choisit ensuite un chemin* $\gamma_x \in \Gamma$, *d'origine* a *et d'extrémité* x. *On pose enfin*

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega.$$

Alors f *est une fonction de classe* C^{r+1} *et c'est une primitive de* ω.

Démonstration. En vertu de la proposition 2.1.9, il suffit de démontrer le cas où $r = 0$. Nous allons prouver que la fonction f ainsi définie est de classe C^1 et que $\mathrm{d}f = \omega$. Pour cela, il suffit de prouver que, pour tout $x \in U$, la fonction f est différentiable au point x de différentielle $\mathrm{d}_x f = \omega(x)$. On commence par remarquer que cette fonction ne dépend pas du choix des chemins γ_x. En effet, si $x \in U$ et si θ_x est un autre chemin de U appartenant à la famille Γ, d'origine a et d'extrémité x, on peut considérer son chemin opposé $\bar{\theta}_x$, et le chemin composé $\bar{\theta}_x \cdot \gamma_x$ est alors dans Γ (par la condition (a)), d'où les égalités

$$\int_{\gamma_x} \omega - \int_{\theta_x} \omega = \int_{\bar{\theta}_x \cdot \gamma_x} \omega = 0.$$

Considérons à présent un point x de U, et choisissons un nombre réel strictement positif r tel que la boule ouverte $B(x, r)$, de centre x

et de rayon r, soit contenue dans U, et telle que la condition (b) soit satisfaite. Soit $h \in \mathrm{B}(0,r)$, et notons ρ le chemin de U défini par

$$\rho(t) = x + th.$$

On vérifie aussitôt que

$$\int_\rho \omega = \int_0^1 \omega(x+th)(h)\mathrm{d}t.$$

D'autre part, le chemin composé $\rho \cdot \gamma_x$ est un chemin de la famille Γ, d'origine a et d'extrémité $x+h$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \int_{\rho\cdot\gamma_x} \omega \\ &= \int_{\gamma_x} \omega + \int_\rho \omega \\ &= f(x) + \int_0^1 \omega(x+th)(h)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme la fonction

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(x,r) \times [0,1] &\to \mathrm{E}^\vee \\ (h,t) &\mapsto \omega(x+th) \end{aligned}$$

est continue, l'intégrale $\int_0^1 \omega(x+th)\mathrm{d}t \in \mathrm{E}^\vee$ est une fonction continue de h, de sorte que

$$\lim_{h\to 0} \int_0^1 \omega(x+th)\mathrm{d}t = \omega(x).$$

Comme $\mathrm{E}^\vee$ est de dimension finie, on peut définir sa topologie avec notre norme préférée. On prendra la norme $\|-\|$ définie par

$$\|u\| = \sup_{v\neq 0} \frac{|u(v)|}{\|v\|}$$

pour toute application $\mathbf{R}$-linéaire $u : \mathrm{E} \to \mathbf{C}$ (et où on a choisi une norme $\|-\|$ sur E). On a donc, pour tout $h \in \mathrm{B}(x,r)$:

$$\begin{aligned} \frac{|f(x+h)-f(x)-\omega(x)(h)|}{\|h\|} &= \frac{1}{\|h\|}\Big|\int_0^1 \omega(x+th)(h)\mathrm{d}t - \omega(x)(h)\Big| \\ &\leqslant \Big\|\int_0^1 \omega(x+th)\mathrm{d}t - \omega(x)\Big\|. \end{aligned}$$

Comme on sait que

$$\lim_{h\to 0}\Big\|\int_0^1 \omega(x+th)\mathrm{d}t - \omega(x)\Big\| = 0,$$

cela implique que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h)-f(x)-\omega(x)(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Autrement dit, la fonction f est différentiable au point x, et on a l'égalité $d_x f = \omega(x)$. □

Théorème 2.4.4. *Une forme différentielle* ω *de classe* C^r *sur* U *est exacte si et seulement si, pour tout lacet* γ *de* U*, de classe* C^1 *par morceaux, on a*

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

Démonstration. Montrons que cette condition est nécessaire. Soit f une primitive de ω, et soit γ un lacet de U de classe C^1 par morceaux. En vertu de la proposition 2.3.10, on a

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0.$$

Il reste donc à prouver que c'est une condition suffisante. On remarque d'autre part que se donner une primitive de ω revient à se donner une primitive de chacune des restrictions de ω sur chaque composante connexe de U. On peut donc se limiter au cas où U est connexe et non vide. On conclut alors grâce à la proposition 2.4.3, en prenant pour famille de chemins Γ celle de tous les chemins de classe C^1 par morceaux (la condition (c) est alors assurée par le lemme 2.4.1). □

5. Déformation des chemins d'intégration

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel réel E de dimension finie n.

Définition 2.5.1. Une forme différentielle ω sur U est *localement exacte* si, pour tout point x de U, il existe un voisinage ouvert V de x dans U tel que la restriction de ω à V admette une primitive.

Lemme 2.5.2 (Lemme de Lebesgue). *Soit* X *un espace métrique compact et soit* $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ *un recouvrement ouvert de* X*. Il existe un nombre réel* $r > 0$ *tel que, pour tout* $x \in X$*, la boule ouverte* $B(x, r)$*, centrée en* x *et de rayon* r*, soit contenue dans l'un des ouverts* U_i*,* $i \in I$.

Démonstration. On procède par l'absurde. Si ce n'était pas le cas, pour tout entier $n \geqslant 0$, il existerait un élément x_n tel que la boule ouverte $B(x_n, \frac{1}{n})$ ne soit contenue dans aucun des ouverts U_i. Or, l'espace topologique X étant supposé compact, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ admet au moins une valeur d'adhérence x. Comme $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe un indice $i \in I$ tel que $x \in U_i$, et, vu que U_i est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B(x, \rho) \subset U_i$. Mézalor, pour tout n tel que $\frac{1}{n} < \frac{\rho}{2}$ et tel que $d(x, x_n) < \frac{\rho}{2}$, les inclusions $B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(x_n, \frac{\rho}{2}) \subset B(x, \rho) \subset U_i$ donnent une contradiction. □

Proposition 2.5.3. *Soit* ω *une forme différentielle localement exacte sur* U. *Pour tout chemin* $\gamma : [0,1] \to \mathrm{U}$, *il existe une subdivision de l'intervalle unité* $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m < s_{m+1} = 1$ *telle que, pour chaque indice* i, $0 \leqslant i \leqslant m$, *il existe un ouvert* U_i *contenant* $\gamma([s_i, s_{i+1}])$, *de sorte que* ω *admette une primitive sur* U_i.

Démonstration. On choisit un recouvrement de U par des ouverts V sur lesquels ω admet une primitive. On conclut facilement en appliquant le lemme de Lebesgue au recouvrement de $[0,1]$ défini par les ouverts $\gamma^{-1}(\mathrm{V})$. □

2.5.4. Soit ω une forme différentielle localement exacte sur U, et soit γ un chemin de U. On choisit une subdivision de l'intervalle unité $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m < s_{m+1} = 1$ telle que, pour chaque indice i, $0 \leqslant i \leqslant m$, il existe un ouvert *connexe* U_i contenant $\gamma([s_i, s_{i+1}])$, de sorte que ω admette une primitive f_i sur U_i.

Définition 2.5.5. Sous les hypothèses du numéro 2.5.4, on définit l'*intégrale de* ω *le long du chemin* γ par la formule

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{m} f_i(\gamma(s_{i+1})) - f_i(\gamma(s_i)).$$

Remarque 2.5.6. Cette définition a un sens raisonnable : l'intégrale $\int_\gamma \omega$ ne dépend ni du choix des primitives f_i, ni du choix de la subdivision. Pour le vérifier, on procède de la manière suivante. Pour tous points a et b de U_i, le nombre complexe $f_i(b) - f_i(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive f_i de ω sur U_i : deux primitives de ω sur un ouvert connexe ne diffère que par une constante. Il suffit donc d'observer que la définition de $\int_\gamma \omega$ ne dépend pas du choix de la subdivision, ce qui est un exercice facile laissé au lecteur.

On remarque que le lemme 2.4.1 nous permet de trouver, pour chaque indice i, un chemin θ_i de U_i, de classe C^1 par morceaux, tel que $\theta_i(0) = \gamma(s_i)$ et $\theta_i(1) = \gamma(s_{i+1})$. On définit le chemin θ comme le composé itéré des chemins θ_i :

$$\theta = \theta_m \cdot (\theta_{m-1} \cdot (\cdots (\theta_1 \cdot \theta_0) \cdots)).$$

On a alors, en vertu de la proposition 2.3.10, la formule

$$\int_\theta \omega = \sum_{i=0}^{m} \int_{\theta_i} \omega = \sum_{i=0}^{m} f_i(\gamma(s_{i+1})) - f_i(\gamma(s_i)).$$

Autrement dit, on peut remplacer le chemin γ par le chemin θ, ce qui signifie toutes les propiétés connues de l'intégrale le long d'un chemin de classe C^1 par morceaux restent vraies pour l'intégrale le long d'un chemin continu, dès que cela a un sens.

Définition 2.5.7. Considérons deux lacets α et β de U.

Une *homotopie de α vers β* est une application continue

$$h : [0,1] \times [0,1] \to \mathrm{U}$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

(a) pour tout $t \in [0,1]$, $h(0,t) = \alpha(t)$ et $h(1,t) = \beta(t)$;

(b) pour tout $s \in [0,1]$, $h(s,0) = h(s,1)$.

On dit que les lacets α et β sont *homotopes* s'il existe une homotopie de α vers β.

Remarque 2.5.8. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence (la preuve est laissée à titre d'exercice).

Exemple 2.5.9. Si U est convexe, et si x_0 est un point de U, tout lacet α de U de point base x_0 est homotope au lacet constant : on a une homotopie h donnée par la formule

$$h(s,t) = (1-t)\alpha(t) + sx_0 .$$

Exemple 2.5.10. Pour $\mathrm{U} = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, le lacet $t \mapsto e^{2i\pi t}$ n'est pas homotope au lacet constant : cela résulte de la propriété d'invariance par homotopie démontrée ci-dessous.

Exemple 2.5.11. Pour $\mathrm{U} = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, les deux lacets $t \mapsto e^{2i\pi t}$ et $t \mapsto a\cos 2\pi t + ib \sin 2\pi t$ sont homotopes lorsque $a > 0$ et $b > 0$.

Exercice 2.5.12. Démontrer les propriétés suivantes.

1) La composition des lacets est inversible à homotopie près : si γ est un lacet, et $\bar{\gamma}$ son lacet opposé (voir l'exercice 2.3.6 (v)), alors $\gamma \cdot \bar{\gamma}$ est homotope au lacet constant $\gamma(1)$.
2) La composition des lacets est associative à homotopie près : si α, β et γ sont trois lacets tels que $\alpha(1) = \beta(0)$ et $\beta(1) = \gamma(0)$, alors les lacets $\gamma \cdot (\beta \cdot \alpha)$ et $(\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha$ sont homotopes.

Définition 2.5.13. On dit que U est *simplement connexe* s'il est non vide, connexe, et si tout lacet de U est homotope à un lacet constant.

Exemple 2.5.14. Si U est convexe et non vide, alors il est simplement connexe.

Exemple 2.5.15. D'après l'exemple 2.5.10, l'ouvert $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ n'est pas simplement connexe.

Théorème 2.5.16 (Invariance par homotopie). *Soit ω une forme différentielle continue localement exacte dans l'ouvert* U. *Si α et β sont deux lacets homotopes de* U, *alors on a*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega .$$

Démonstration. Soit h une homotopie de α vers β. On choisit un recouvrement de U par des ouverts V sur lesquels ω admet une primitive. En appliquant le lemme de Lebesgue (2.5.2) au recouvrement de $[0,1]^2$ défini par les ouverts $h^{-1}(V)$, on voit qu'on peut trouver deux subdivisions

$$\begin{aligned} & 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_p < s_{p+1} = 1 \\ \text{et} \quad & 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_q < t_{q+1} = 1 \end{aligned}$$

telles que, pour $0 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant q$, il existe un ouvert $U_{i,j}$ de U sur lequel ω admette une primitive $f_{i,j}$, de sorte que $h(R_{i,j}) \subset U_{i,j}$, où on a posé $R_{i,j} = [s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$. Soit $\gamma_{i,j} : [0,1] \to [0,1]^2$ le lacet qui paramètre le bord du rectangle $R_{i,j}$ dans le sens direct. Alors, en vertu du théorème 2.4.4, on a

$$\int_{h\circ\gamma_{i,j}} \omega = 0.$$

Soit $\gamma : [0,1] \to [0,1]^2$ le lacet qui paramètre le bord du carré $[0,1]^2$ dans le sens direct. On vérifie alors, grâce à une utilisation répétée de la version continue de l'exercice 2.3.6, que

$$\int_{h\circ\gamma} \omega = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \int_{h\circ\gamma_{i,j}} \omega = 0.$$

Si on note σ le chemin $s \mapsto h(s,0)$ et τ le chemin $s \mapsto h(s,1)$, on constate que $h \circ \gamma$ est le composé du chemin α, du chemin τ, du chemin opposé du chemin β, et du chemin opposé du chemin σ. Comme $\sigma = \tau$ (par définition des homotopies), on a donc

$$0 = \int_{h\circ\gamma} \omega = \int_{\alpha} \omega + \int_{\tau} \omega + \int_{\bar\beta} \omega + \int_{\bar\sigma} \omega = \int_{\alpha} \omega - \int_{\beta} \omega,$$

ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 2.5.17. *Si* U *est simplement connexe, toute forme différentielle localement exacte sur* U *est exacte.*

Démonstration. Cela résulte des théorèmes 2.4.4 et 2.5.16. □

6. Le théorème de Poincaré

Soit E un espace vactoriel réel de dimension finie n. On désigne par $\Lambda^2(E,\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des formes $\mathbf{R}$-bilinéaires alternées sur E à valeurs complexes $\varphi : E \times E \to \mathbf{C}$ (ce qui signifie que φ est une application $\mathbf{R}$-bilinéaire telle que $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$ pour tous $x,y \in E$). Étant données deux formes linéaires $\alpha, \beta \in E^\vee$, on note $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^2(E,\mathbf{C})$ le *produit extérieur de α et* β, c'est-à-dire la forme bilinéaire alternée définie par

$$(\alpha \wedge \beta)(u,v) = \alpha(u)\beta(v) - \beta(u)\alpha(v)$$

pour tous $(u,v) \in \mathrm{E}^2$. On vérifie aussitôt que l'application produit extérieur

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^\vee \times \mathrm{E}^\vee &\to \Lambda^2(\mathrm{E},\mathbf{C}) \\ (\alpha,\beta) &\mapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

est $\mathbf{C}$-bilinéaire alternée.

Proposition 2.6.1. *Soit $e_1,\ldots,e_n$ une base de* E. *Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note $x_i : \mathrm{E} \to \mathbf{C}$ l'unique application $\mathbf{R}$-linéaire qui envoie e_i sur* 1 *et e_j sur* 0 *pour $j \neq i$. Alors les formes bilinéaires alternées $x_i \wedge x_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, forment une base de l'espace vectoriel complexe $\Lambda^2(\mathrm{E},\mathbf{C})$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \Lambda^2(\mathrm{E},\mathbf{C})$. Posons $a_{i,j} = \varphi(e_i,e_j)$ pour tous i et j. Nous allons vérifier que $\varphi = \sum_{i<j} a_{i,j} x_i \wedge x_j$. Soient $u,v \in \mathrm{E}$, que l'on écrit dans la base prescrite $u = \sum_i u_i e_i$ et $v = \sum_i v_i e_i$. On calcule :

$$\varphi(u,v) = \sum_{i<j} a_{i,j}(u_i v_i - v_i u_j) = \sum_{i<j} (x_i \wedge x_j)(u,v).$$

Autrement dit, les formes bilinéaires alternées $x_i \wedge x_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, forment une famille génératrice. Montrons que c'est une famille libre. Si $\varphi = \sum_{i<j} a_{i,j} x_i \wedge x_j$ est nulle, on peut l'évaluer en chaque couple (e_i,e_j), $1 \leqslant i < j \leqslant n$, et en conclure que $a_{i,j} = 0$ pour $i < j$. □

Corollaire 2.6.2. *On a* $\dim_{\mathbf{C}} \Lambda^2(\mathrm{E},\mathbf{C}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Définition 2.6.3. Soit U un ouvert de E. Une *forme différentielle (complexe) de degré* 2 sur U est une application continue

$$\omega : \mathrm{U} \to \Lambda^2(\mathrm{E},\mathbf{C}).$$

On note $\Omega^{2,r}(\mathrm{U})$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des formes différentielles de degré 2 et de classe C^r sur U ($r \geqslant 0$).

Remarque 2.6.4. Comme dans la cas des formes différentielles de degré 1, l'espace $\Omega^{2,r}(\mathrm{U})$ est naturellement muni d'une structure de $\mathscr{C}^r(\mathrm{U})$-module. De plus, on dispose d'une application $\mathscr{C}^r(\mathrm{U})$-bilinéaire alternée

$$\wedge : \Omega^{1,r}(\mathrm{U}) \times \Omega^{1,r}(\mathrm{U}) \to \Omega^{2,r}(\mathrm{U})$$

qui associe à un couple (α,β) de formes différentielles de degré 1 la forme différentielle $\alpha \wedge \beta$, de degré 2, définie par la formule évidente $x \mapsto \alpha(x) \wedge \beta(x)$. Cette forme différentielle $\alpha \wedge \beta$ est appelée le *produit extérieur* des formes différentielles α et β.

Proposition 2.6.5. *Soit $e_1,\ldots,e_n$ une base de* E. *On considère un ouvert* U *de* E, *et on reprend les notations du numéro* 2.1.5. *Alors $\Omega^{2,r}(\mathrm{U})$ est un $\mathscr{C}^r(\mathrm{U})$-module libre de base $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Autrement* *dit, toute forme différentielle* $\omega \in \Omega^{2,r}(\mathrm{U})$ *s'écrit de manière unique sous la forme*

$$\omega = \sum_{i<j} f_{i,j} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j ,$$

où $f_{i,j} : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *est une fonction de classe* C^r *pour tous* $i < j$.

Démonstration. Chaque forme différentielle $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ est l'application constante de valeur $x_i \wedge x_j$ (avec les notations de la proposition 2.6.1). Comme les formes bilinéaires alternées $x_i \wedge x_j$, $i < j$, forment une base de $\Lambda^2(\mathrm{E}, \mathbf{C})$, on en déduit aussitôt cet énoncé. □

Proposition 2.6.6. *Soit* $\mathrm{U} \subset \mathrm{E}$ *un ouvert, et* $r \geqslant 1$ *un entier. Il existe une application* $\mathbf{C}$*-linéaire et une seule*

$$\mathrm{d} : \Omega^{1,r}(\mathrm{U}) \to \Omega^{2,r-1}(\mathrm{U})$$

vérifiant les propriétés suivantes.

(i) Pour toute fonction $f \in \mathrm{C}^{r+1}(\mathrm{U})$, *on a* $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$.

(ii) Pour tous $f \in \mathscr{C}^r(\mathrm{U})$ *et* $\omega \in \Omega^{1,r}(\mathrm{U})$, *on a l'égalité*

$$\mathrm{d}(f\omega) = \mathrm{d}f \wedge \omega + f \mathrm{d}\omega .$$

Démonstration. Montrons l'unicité. On va procéder en décrivant les formes différentielles par leurs coordonnées : on choisit une base $e_1, \dots, e_n$ de E, et on reprend les notations du numéro 2.1.5. Soit $\omega = \sum_i f_i \mathrm{d}x_i$ une forme différentielle de degré 1 sur U, les fonctions f_i étant de classe C^r. On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \sum_i \mathrm{d}(f_i \mathrm{d}x_i) \\ &= \sum_i (\mathrm{d}f_i \wedge \mathrm{d}x_i + f_i \mathrm{d}(\mathrm{d}x_i)) \\ &= \sum_i \mathrm{d}f_i \wedge \mathrm{d}x_i . \end{aligned}$$

Pour démonter l'existence de cet opérateur, on peut bien entendu définir $\mathrm{d}\omega$ par la formule ci-dessus, puis vérifier les propriétés (i) et (ii). On peut aussi procéder d'une manière plus intrinsèque. Soit $\omega : \mathrm{U} \to \mathrm{E}^\vee$ une application de classe C^r. Pour chaque point x de U, on note $\mathrm{d}_x\omega : \mathrm{E} \to \mathrm{E}^\vee$ la différentielle de ω au point x. On définit alors $\mathrm{d}\omega(x) \in \Lambda^2(\mathrm{E}, \mathbf{C})$ par la formule

$$\mathrm{d}\omega(x)(u,v) = \mathrm{d}_x\omega(u)(v) - \mathrm{d}_x\omega(v)(u)$$

pour tout $(u, v) \in \mathrm{E}^2$. On obtient de la sorte une application

$$\mathrm{d}\omega : \mathrm{U} \to \Lambda^2(\mathrm{E}, \mathbf{C}).$$

Le fait que la différentielle de l'application ω soit de classe C^{r-1} implique aussitôt que $\mathrm{d}\omega$ est une forme différentielle de degré 2 et de classe C^{r-1}. On a donc défini une application $\mathbf{C}$-linéaire

$$d : \Omega^{1,r}(U) \to \Omega^{2,r-1}(U).$$

La propriété (i) est bien connue : c'est l'une des formulations du lemme de Schwarz (cf. remarque 2.1.7 et exercice 2.6.7). La propriété (ii) est quant à elle une conséquence directe de la formule de Leibniz (de la différentielle du produit de deux fonctions) et de la définition du produit extérieur des formes différentielles. □

Exercice 2.6.7. Montrer que, lorsqu'on travaille avec des coordonnées (suivant les conventions de 2.1.5), pour toute forme différentielle de la forme $\omega = \sum_i f_i \mathrm{d}x_i$, on a

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i<j} \Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j .$$

Définition 2.6.8. Une forme différentielle ω sur un ouvert U de E est dite *fermée* si $\mathrm{d}\omega = 0$.

Théorème 2.6.9 (Poincaré). *Soit* U *un ouvert simplement connexe de* E, *et* $r \geqslant 1$ *un entier. Une forme différentielle* ω, *de classe* C^r *sur* U, *est exacte si et seulement si elle est fermée.*

Démonstration. La propriété (i) de la proposition 2.6.6 montre que toute forme différentielle admettant une primitive est fermée. Il reste donc à prouver la réciproque. Soit ω une forme différentielle fermée sur U. Comme l'intégrale de ω sur un lacet constant est nécessairement nulle, pour montrer que ω admet une primitive, en vertu des théorèmes 2.4.4 et 2.5.16, il suffit de démontrer que ω est localement exacte. Montrons qu'il suffit de traiter le cas où U est convexe. Pour tout ouvert V de U, la forme différentielle ω est encore exacte sur V : si on note $i : V \to U$ l'inclusion, on a $\mathrm{d}i^*(\omega) = i^*(\mathrm{d}\omega) = 0$ (voir l'exercice 2.2.3). Si on admet le théorème de Poincaré pour les ouverts convexes, on en déduit donc que $i^*(\omega)$ admet une primitive sur V. Comme U admet un recouvrement par des ouverts convexes (par exemple, des boules ouvertes), cela implique que ω est localement exacte.

Dorénavant, on fait donc l'hypothèse supplémentaire que U est un ouvert convexe de E. On peut supposer, sans perte de généralité, que $0 \in U$ (cela ne sert qu'à simplifier les notations pour la suite). En particulier, pour tout $x \in U$ on dispose du chemin γ_x donné par la formule $t \mapsto tx$. On définit une fonction $f : U \to \mathbf{C}$ par la formule

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega = \int_0^1 \omega(tx)(x)\mathrm{d}t.$$

On va vérifier que f est de classe C^1 et que $\mathrm{d}f = \omega$.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées associé au choix d'une base de E (toujours suivant les conventions du numéro 2.1.5). On pose

$$\omega = \sum_i \varphi_i \mathrm{d}x_i\,,$$

où $\varphi_i : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ est une fonction de classe C^1 pour tout i. Si on pose $\mathrm{F}(t,x) = \omega(tx)(x)$, on a donc

$$\mathrm{F}(t,x) = \sum_i \varphi_i(tx)x_i$$

et enfin

$$f(x) = \int_0^1 \mathrm{F}(t,x)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \varphi_i(tx)x_i \mathrm{d}t.$$

D'après les théorèmes standard de passage à la limite et de dérivation sous le signe somme, cela implique que la fonction f est donc bien de classe C^1. Les dérivées partielles de F admettent la description suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}(t,x) &= \varphi_i(tx) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(tx)tx_i + \sum_{j\neq i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(tx)tx_j \\ &= \varphi_i(tx) + \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(tx)tx_j\,.\end{aligned}$$

D'autre part, on sait, d'après l'exercice 2.6.7, qu'on a l'identité

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j\,.$$

Comme $\mathrm{d}\omega = 0$ par hypothèse, on en déduit, grâce à la proposition 2.6.5, que

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$$

pour tous i et j, ce qui induit les identités

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}(t,x) = \varphi_i(tx) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(tx)tx_j = \frac{\partial \psi_i}{\partial t}(t,x),$$

où $\psi_i(t,x) = t\varphi_i(tx)$. En dérivant sous le signe somme, il en résulte l'expression suivante des dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}(t,x)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\partial \psi_i}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}t = \Big[\psi_i(t,x)\Big]_{t=0}^{t=1} = \varphi_i(x).$$

Autrement dit, $\mathrm{d}f = \omega$. □

Corollaire 2.6.10. *Soit* U *un ouvert de* E. *Une forme différentielle* ω *de classe* C^1 *sur* U *est localement exacte si et seulement si elle est fermée.*

Démonstration. La preuve du fait que toute forme différentielle fermée est localement exacte a déjà été donnée au cours de la démonstration du théorème 2.6.9. Supposons que ω soit localement exacte. Alors, en vertu du théorème 2.6.9, il existe un recouvrement ouvert de U par des ouverts (convexes) V tels que la restriction de $d\omega$ à V soit nulle. Cela implique que la fonction $d\omega : U \to \Lambda^2(E, \mathbf{C})$ est nulle sur un recouvrement de U, et donc qu'elle est nulle. □

Corollaire 2.6.11. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{R}^2$. *Une forme différentielle* $\omega = f\,dx + g\,dy$, *de classe* C^1 *sur* U, *est localement exacte si et seulement si, pour tout* $(x, y) \in U$, *on a*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Démonstration. On a alors

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Comme $dx \wedge dy$ est une base du $\mathscr{C}^r(U)$-module $\Lambda^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{C})$, ce corollaire est donc un cas particulier du précédent. □

CHAPITRE 3

Fonctions holomorphes

1. Dérivation complexe

Soit U un ouvert de **C**.

Définition 3.1.1. Une fonction $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ est *holomorphe* si elle est **C**-dérivable en tout point de U, c'est-à-dire si, pour tout $z \in \mathrm{U}$, la limite

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{z-h}$$

existe dans **C**. Le nombre $f'(z)$ est appelé la *dérivée de f au point z*.

Exemple 3.1.2. En vertu de la proposition 1.1.14, toute fonction analytique est holomorphe. On verra plus tard que la réciproque est vraie (4.1.1).

Exercice 3.1.3. Démontrer que, pour qu'une application $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ soit holomorphe, il faut et il suffit que f soit différentiable et que, pour tout $z \in \mathrm{U}$, l'application $\mathrm{d}_z f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ soit **C**-linéaire.

Exercice 3.1.4. Démontrer les propriété élémentaires suivantes.
(1) Les fonctions holomorphes sur U forment une **C**-algèbre.
(2) Si $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ est holomorphe, alors $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur le complémentaire du lieu des zéros de f.
(3) Si $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V} \subset \mathbf{C}$ est holomorphe, à valeurs dans un ouvert V, et si $g : \mathrm{V} \to \mathbf{C}$ est holomorphe, alors la fonction composée $g \circ f$ est holomorphe.

Remarque 3.1.5. La fonction $z \mapsto z$ est holomorphe de différentielle constante $\mathrm{d}z$ (l'identité de **C**). La fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe : sa différentielle $\mathrm{d}\bar{z}$ est anti-linéaire (la conjugaison complexe). On vérifie aussitôt que $\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}\bar{z}$ forment une base de $\Omega^{1,r}(\mathrm{U})$ en tant que $\mathscr{C}^r(\mathrm{U})$-module.

Proposition 3.1.6. *Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Toute primitive de la forme différentielle $\omega = f\,\mathrm{d}z$ est une fonction holomorphe $\mathrm{F} : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ telle que $\mathrm{F}' = f$.*

Démonstration. Comme l'application $\omega(z)$ est clairement **C**-linéaire pour tout $z \in \mathrm{U}$, il s'agit ici d'une reformulation de l'exercice 3.1.3. □

REMARQUE 3.1.7. On écrira x pour la partie réelle de $z \in \mathbf{C}$, et y pour sa partie imaginaire, de sorte $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ forment une base de l'espace des formes différentielles sur U.

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ une application différentiable. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\bar{z}. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après l'exercice 3.1.3, pour que f soit holomorphe, il faut et il suffit qu'on ait la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Si on désigne respectivement par P et Q la partie réelle et la partie imaginaire de f, cette équation est équivalente au système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}. \end{cases}$$

Ces équations sont connues sous le nom d'*équations de Cauchy-Riemann*.

2. Le théorème de Cauchy

On fixe un ouvert U de **C**.

THÉORÈME 3.2.1 (Cauchy). *Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. La forme différentielle $\omega = f\,\mathrm{d}z$ est localement exacte.*

Dans le cas où la fonction dérivée f' est continue, on a les identifications

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}z = f'\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = 0,$$

ce qui prouve l'assertion grâce au théorème de Poincaré (2.6.9). La preuve du cas général est moins directe. Nous allons procéder en passant par plusieurs résultats intermédiaires.

DÉFINITION 3.2.2. Soit γ un chemin de U de classe C^1 par morceaux. La *longueur de* γ est le nombre

$$\int_0^1 |\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

LEMME 3.2.3. *Soit γ un chemin de* U *de classe* C^1 *par morceaux et de longueur ℓ, et soit* $\mathrm{M} \geqslant 0$ *un nombre réel. Si* $|f(z)| \leqslant \mathrm{M}$ *sur l'image de γ, alors*

$$\left|\int_\gamma f\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \mathrm{M}\ell.$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Comme $|f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leqslant \mathrm{M}|\gamma'(t)|$ pour tout t, on en déduit aussitôt l'assertion. □

3.2.4. La propriété, pour une forme différentielle, d'être localement exacte étant, par définition, de nature locale, il est suffisant de prouver le théorème 3.2.1 dans le cas particulier où U = D est un disque ouvert de **C**. Dans la suite, on fait donc l'hypothèse supplémentaire que U = D est une boule ouverte de $\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$.

On appelera *triangle* toute partie T de D obtenue comme l'enveloppe convexe de trois points a_1, a_2 et a_3 de D. Dans ce cas, on notera ∂T le chemin (affine par morceaux) de U qui consiste à parcourir le bord de T dans le sens direct, en partant de a_1.

Lemme 3.2.5. *Soit* ω *une forme différentielle de degré* 1, *continue sur* D, *telle que, pour tout triangle* $\mathrm{T} \subset \mathrm{D}$, *on ait*

$$\int_{\partial \mathrm{T}} \omega = 0.$$

Alors ω *est exacte.*

Démonstration. Soit Γ la famille des chemins affines par morceaux dans D. Montrons que, pour tout lacet $\gamma \in \Gamma$, on a $\int_\gamma \omega = 0$. Modulo reparamétrisation, il existe une suite finie de chemins affines γ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, telle que $\gamma_{i+1}(0) = \gamma_i(1)$ pour $1 \leqslant i < n$, et

$$\gamma = \gamma_n \cdot (\gamma_{n-1}(\cdots(\gamma_2 \cdot \gamma_1))\cdots).$$

On procède par récurrence sur n. Si $n \leqslant 3$, alors, modulo reparamétrisation, on doit avoir $\gamma = \partial\mathrm{T}$ pour un triangle T de D, et il n'y a donc rien à vérifier. Si $n > 3$, on pose

$$\zeta = \gamma_n \cdot (\gamma_{n-1}(\cdots(\gamma_4 \cdot \gamma_3))\cdots).$$

On a dans ce cas :

$$\int_\gamma \omega = \int_\zeta \omega + \int_{\gamma_2\cdot\gamma_1} \omega.$$

On peut voir γ_1 et γ_2 comme des chemins paramétrant deux arêtes consécutives d'un triangle T, et si θ est un chemin affine paramétrant le troisième côté (dans le sens adéquat), on a alors

$$\int_\theta \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\partial\mathrm{T}} \omega = 0.$$

Autrement dit, on a

$$\int_{\gamma_2\cdot\gamma_1} \omega = \int_{\bar\theta} \omega.$$

On en déduit, par récurrence, que

$$\int_\gamma \omega = \int_\zeta \omega + \int_{\bar\theta} \omega = \int_{\zeta\cdot\bar\theta} \omega = 0.$$

Ce lemme est à présent un cas particulier de la proposition 2.4.3. □

Lemme 3.2.6. *Soit* $f : \mathrm{D} \to \mathbf{C}$ *une fonction holomorphe sur la boule ouverte* $\mathrm{D} \subset \mathbf{C}$*. Alors, pour tout triangle* $\mathrm{T} \subset \mathrm{U}$*, on a*

$$\int_{\partial \mathrm{T}} f\,\mathrm{d}z = 0.$$

Démonstration. Soit T un triangle dans D, de périmètre ℓ. On peut supposer que les sommets de T sont distincts deux à deux et ne sont pas alignés (car sinon, l'assertion relève du trivial). En considérant les milieux de chacune de arêtes de T, on obtient quatre nouveaux triangles Δ_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, qui subdivisent T. On appellera *triangles admissibles* les triangles Δ_i comme ci-dessus tels que

$$\left|\int_{\partial\Delta_i} f\,\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{1}{4}\left|\int_{\partial \mathrm{T}} f\,\mathrm{d}z\right|.$$

On observe facilement que

$$\int_{\partial \mathrm{T}} f\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial\Delta_i} f\,\mathrm{d}z.$$

Il s'en suit que la somme des quatre modules d'intégrales $|\int_{\partial\Delta_i} f\,\mathrm{d}z|$ est supérieure ou égale à $|\int_{\partial\mathrm{T}} f\,\mathrm{d}z|$. Par conséquent, il existe toujours un triangle admissible de T. On construit une suite décroissante de triangles $\mathrm{T}_n \subset \mathrm{T}$, $n \geqslant 0$, de longueur $\frac{\ell}{2^n}$, et de sorte que

$$\left|\int_{\partial \mathrm{T}_n} f\,\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial \mathrm{T}} f\,\mathrm{d}z\right|.$$

On procède bien entendu par récurrence : en posant $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}$, puis en définissant T_{n+1} comme un choix de triangle admissible de T_n.

Nous allons démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait

$$\left|\int_{\partial \mathrm{T}_n} f\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \varepsilon\frac{\ell^2}{4^n}.$$

Pour cela, on choisit un point $a \in \bigcap_{n\geqslant 0} \mathrm{T}_n$ (un tel point existe en vertu du théorème des fermés emboîtés). Comme f est dérivable au point a, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathrm{U}$ vérifiant $|z-a| < r$, on ait

$$|f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)| < \varepsilon|z-a|.$$

Comme tout polynôme complexe P admet une primitive, on a l'annulation $\int_{\partial T} P\mathrm{d}z = 0$ pour tout triangle T. On en déduit que

$$\int_{\partial T_n} f\,\mathrm{d}z = \int_{\partial T_n} \big(f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)\big)\mathrm{d}z.$$

On peut trouver un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, si $z \in T_n$, alors

$$|z - a| \leqslant \frac{\ell}{2^n} < r.$$

On en déduit par le lemme 3.2.3 l'inégalité souhaitée.

En conclusion, pour tout n assez grand, on a

$$\frac{1}{4^n}\Big|\int_{\partial T} f\,\mathrm{d}z\Big| \leqslant \varepsilon\frac{\ell^2}{4^n}.$$

En particulier, on a donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\Big|\int_{\partial T} f\,\mathrm{d}z\Big| \leqslant \varepsilon\ell^2,$$

ce qui termine la démonstration de ce lemme. □

Démonstration du théorème 3.2.1. On fait l'hypothèse anodine que U est une boule ouverte de **C** (conformément au numéro 3.2.4). Le fait que la forme différentielle $\omega = f\,\mathrm{d}z$ admette une primitive sur U suit alors immédiatement des lemmes 3.2.5 et 3.2.6. □

Corollaire 3.2.7. *Soit* U *un ouvert simplement connexe de* **C**. *Toute fonction holomorphe sur* U *admet une primitive : pour toute fonction holomorphe* $f : U \to \mathbf{C}$, *il existe une fonction holomorphe* $F : U \to \mathbf{C}$ *telle que* $F' = f$.

Démonstration. On applique le corollaire 2.5.17 et le théorème 3.2.1 à la forme différentielle $\omega = f\,\mathrm{d}z$. □

Corollaire 3.2.8. *Soit* $f : U \to \mathbf{C}$ *une fonction holomorphe sur un ouvert de* **C**. *Si* α *et* β *sont deux lacets homotopes de* U, *alors on a*

$$\int_\alpha f\,\mathrm{d}z = \int_\beta f\,\mathrm{d}z.$$

Démonstration. Cela découle aussitôt des théorèmes 2.5.16 et 3.2.1. □

3. Déterminations du logarithme

Pour $z \in \mathbf{C} \smallsetminus \{0\}$, l'équation

$$e^\zeta = z$$

a une infinité de solutions : si $z = re^{i\theta}$, où $r > 0$ est un nombre réel et où $\theta \in \mathbf{R}$, alors $\zeta = e^{\log r + i\theta}$ est une solution. D'après le théorème 1.3.5, l'ensemble des solutions est alors

$$\zeta + 2i\pi\mathbf{Z} = \{\zeta + 2ni\pi \mid n \in \mathbf{Z}\}.$$

LEMME 3.3.1. *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, *et* $\varphi : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *une primitive de la forme différentielle* $\omega = \frac{\mathrm{d}z}{z}$ *sur* U. *Alors la fonction quotient*

$$f(z) = \frac{e^{\varphi(z)}}{z}$$

est constante sur U.

DÉMONSTRATION. On sait, d'après la proposition 3.1.6 que la fonction φ est holomorphe, ce qui implique qu'il en est de même de f. D'autre part la différentielle logarithmique de f est

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \mathrm{d}\varphi - \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0.$$

En particulier, on a $\mathrm{d}f = 0$, et, l'ouvert U étant connexe, cela implique que la fonction f est constante. □

DÉFINITION 3.3.2. On appelle *détermination du logarithme sur un ouvert* U *de* $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ une fonction continue $\varphi : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ telle que, pour tout $z \in \mathrm{U}$, on ait

$$e^{\varphi(z)} = z.$$

THÉORÈME 3.3.3. *Soit* $\mathrm{U} \subset \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *un ouvert. On a les propriétés suivantes.*

(i) Si U *est simplement connexe, alors il existe une détermination du logarithme sur* U.

(ii) Si l'ouvert U *est connexe, deux déterminations du logarithme sur* U *qui coïncident en un point sont égales.*

(iii) Toute détermination du logarithme sur U *est une primitive de la forme différentielle* $\frac{\mathrm{d}z}{z}$, *et donc, en particulier, est une fonction holomorphe.*

DÉMONSTRATION. On commence par prouver le point (i). Supposons U simplement connexe. Dans ce cas, en vertu du corollaire 3.2.7, la forme différentielle $\frac{\mathrm{d}z}{z}$ admet une primitive φ sur U, laquelle, d'après la proposition 3.1.6, est nécessairement une fonction holomorphe. Si U est vide, il est clair que φ est une détermination du logarithme. Sinon, soit z_0 un point de U. On choisit une solution ζ_0 de l'équation $e^{\zeta} = z_0$. Quitte à modifier φ en lui ajoutant une constante, on peut supposer que $\varphi(z_0) = \zeta_0$. Le lemme 3.3.1 implique alors que $e^{\varphi(z)} = z$ pour tout $z \in \mathrm{U}$.

Montrons (ii). Supposons U connexe, et considérons deux déterminations du logarithme φ_1 et φ_2 sur U. La fonction $z \mapsto \varphi_2(z) -$

$\varphi_1(z)$ est à valeurs dans $2i\pi\mathbf{Z}$, et est continue ; elle est donc constante, puisque U est connexe. Il en résulte que, si $\varphi_1(z_0) = \varphi_2(z_0)$ pour un certain point $z_0 \in \mathrm{U}$, alors $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$ pour tout $z \in \mathrm{U}$.

Montrons à présent le point (iii). Le problème étant local sur U, on peut supposer que U est un disque ouvert, et donc, en particulier, est simplement connexe. On a vu plus haut qu'au moins une détermination du logarithme sur U est une primitive de la forme différentielle $\frac{dz}{z}$, et donc l'assertion résulte du point (ii). □

Exemple 3.3.4. Soit $\mathrm{U} = \left\{z \in \mathbf{C} \,\middle|\, |z-1| < 1\right\}$. La fonction

$$\varphi(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(1-z)^n}{n}$$

est définie par une série entière de rayon de convergence 1, et donc elle définit une fonction holomorphe sur U, de dérivée $\frac{1}{z}$, telle que $\varphi(1) = 0$. Le théorème ci-dessus implique donc que φ est une détermination du logarithme sur U. C'est la seule qui coïncide avec la fonction $x \mapsto \log x$ sur l'intervalle $\mathrm{U} \cap \mathbf{R} =]0, 2[$.

Exemple 3.3.5. Soit $\mathrm{U} = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, l'ouvert complémentaire de la demi-droite des réels négatifs ou nuls. Comme U est simplement connexe (puisque homéomorphe à $\mathbf{R}^2$), il existe une détermination du logarithme sur U, obtenue comme une primitive de la forme différentielle $\omega = \frac{dz}{z}$. Une telle primitive φ peut être construite de la manère suivante (voir la proposition 2.4.3, laquelle est appliquable grâce au corollaire 3.2.8 et à la simple connexité de U). Pour chaque $z \in \mathrm{U}$, on pose $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$, et on définit un chemin γ_z par la formule $\gamma_z(t) = tz + 1 - t$. On pose alors

$$\varphi(z) = \int_{\gamma_z} \frac{dz}{z} = \log r + \int_0^1 i\theta dt = \log r + i\theta.$$

Cette détermination du logarithme sur U est la seule qui coïncide avec la fonction $x \mapsto \log x$ sur $\mathbf{R}$. Elle est appelée la *détermination principale du logarithme sur* $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$.

Exercice 3.3.6. On considère $\mathrm{V} = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$. Montrer qu'il existe une unique détermination du logarithme ψ sur V telle que $\psi(-1) = \pi$. Soit φ la détermination principale du logarithme sur $\mathrm{U} = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$. Calculer la fonction $\varphi - \psi$ sur l'ouvert $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$.

Exercice 3.3.7. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On suppose donné un ouvert simplement connexe U de $\mathbf{C}$, ainsi qu'une fonction holomorphe $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$. Montrer qu'il existe exactement n fonctions continues $\varphi : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ telles que $\varphi(z)^n = f(z)$ pour tout $z \in \mathrm{U}$, et montrer que ces fonctions φ sont toutes holomorphes.

Exercice 3.3.8. Soit $T = \{x + iy \in \mathbf{C} | x \in \mathbf{R},\ x^2 = 1 \text{ et } y \in \mathbf{R}_+\}$. On pose $W = \mathbf{C} \setminus T$.

1) Montrer que W est un ouvert simplement connexe de **C**.
2) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f : W \to \mathbf{C}$ telle que $e^{f(z)} = 1 - z^2$ pour tout $z \in W$, et telle que $f(0) = 0$ (on pourra construire f comme une primitive d'une certaine forme différentielle).
3) Soit ψ la détermination du logarithme sur $V = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$ définie par $\psi(z) = \log r + i\theta$ où on a posé $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$ (on construit ψ par une méthode similaire à celle de l'exemple 3.3.5). Montrer que, pour tout $z \in W$, on a $i(z+1) \in V$ et $i(z-1) \in V$, et prouver que

$$f(z) = \psi(i(z+1)) + \psi(i(z-1)) - 2i\pi.$$

Exercice 3.3.9. Donner un contre-exemple montrant que la formule $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$ n'est pas vraie pour les variables complexes.

4. Indice d'un lacet par rapport à un point

Soit $a \in \mathbf{C}$. On considère un lacet $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C} \setminus \{a\}$.

Définition 3.4.1. L'*indice de γ au point a* est l'intégrale

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}.$$

Remarque 3.4.2. En vertu du théorème de Cauchy, la forme différentielle $\frac{dz}{z-a}$ est localement exacte sur $\mathbf{C} \setminus \{a\}$, et donc l'indice de γ au point a a bien un sens, même lorsque γ est seulement supposé continu.

Proposition 3.4.3. *Les propriété de l'indice des lacets sont :*

(i) l'indice $\operatorname{Ind}(\gamma, a)$ *est un entier relatif ;*

(ii) si α et β sont deux lacets homotopes de $\mathbf{C} \setminus \{a\}$*, on a* $\operatorname{Ind}(\alpha, a) = \operatorname{Ind}(\beta, a)$ *;*

(iii) pour un lacet $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}$ fixé, la fonction $a \mapsto \operatorname{Ind}(\gamma, a)$ est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert complémentaire de l'image de γ dans **C**.

Démonstration. Démontrons l'assertion (i). Quitte à remplacer γ par le lacet $t \mapsto \gamma(t) - a$, on peut supposer que $a = 0$. Comme $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ admet un recouvrement par des ouverts simpement connexes (comme des disques ouverts, par exemple), on déduit grâce au lemme de Lebesgue (2.5.2) l'existence d'une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ de la forme

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = 1$$

telle que $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ soit contenu dans un ouvert simplement connexe U_j de $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ pour tout j. Pour tout j, $0 \leqslant j \leqslant m$, on choisit une détermination du logarithme g_j sur U_j (ce qui existe, en vertu du théorème 3.3.3). On a alors, par définition :

$$\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=0}^{m} g_j(\gamma(t_{j+1})) - g_j(\gamma(t_j)).$$

Or $g_j(\gamma(t_{j+1})) - g_k(\gamma(t_{j+1})) \in 2i\pi\mathbf{Z}$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$ et de même $g_m(\gamma(1)) - g_0(\gamma(0)) \in 2i\pi\mathbf{Z}$ (puisque leurs exponentielles sont égales à 1), ce qui montre que l'indice est un entier.

L'assertion (ii) est un cas particulier du corollaire 3.2.8.

Montrons l'assertion (iii). On commence par traiter le cas où γ est de classe C^1 par morceaux : pour tout a en dehors de l'image de γ, on a alors

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} \mathrm{d}t.$$

L'application $(a, t) \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$ étant continue par morceaux, on en déduit que la fonction $\mathrm{Ind}(\gamma, -)$ est continue à valeurs dans l'espace discret $\mathbf{Z}$. Cette fonction doit donc être localement constante. Considérons le cas général. Pour montrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, x)$ est continue en a, on peut se restreindre à un voisinage de a. Soit D un disque ouvert de centre a. Quitte à prendre D assez petit, on peu supposer que l'adhérence de D ne rencontre pas γ. Le lemme de Lebesgue (2.5.2) nous permet d'autre part de trouver une subdivision

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m < s_{m+1} = 1$$

et des disques ouverts D_i tels que $\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset D_i$ et $D_i \cap D = \varnothing$ pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant m$. Notons ϑ_i le chemin affine allant de $\gamma(s_i)$ vers $\gamma(s_{i+1})$, et posons

$$\vartheta = \vartheta_m \cdot (\vartheta_{m-1}(\cdots(\vartheta_1 \cdot \vartheta_0)\cdots)).$$

Les ouverts D_i étant simplement connexes, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-x}$ admet une primitive sur D_i pour tout $x \in D$. De plus, ϑ est un chemin affine (et donc de classe C^1) par morceaux, et, comme on l'a déjà observé lors de la remarque 2.5.6, pour tout $x \in D$, on a alors

$$\mathrm{Ind}(\gamma, x) = \mathrm{Ind}(\vartheta, x).$$

La fonction $x \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, x)$ est donc continue au voisinage de a. □

Remarque 3.4.4. L'intuition liée à cette notion est que l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, a)$ compte le nombre de tours que fait γ autour du point a, comptés algébriquement dans le plan orienté dans le sens direct. Cela se constate sur l'exemple de lacet $\gamma_{n,r}$ donné par $t \mapsto re^{2in\pi}$ avec $n \in \mathbf{Z}$ et $r > 0$ fixés, et $a = 0$. On calcule en effet dans ce cas :

$\mathrm{Ind}(\gamma_{n,r}, 0) = n$. La proposition ci-dessus est plus précise : pour tout $a \in \mathbf{C}$ tel que $|a| \neq r$, les assertions (ii) et (iii) donnent

$$\mathrm{Ind}(\gamma_{n,r}, a) = \begin{cases} n & \text{si } |a| < r, \\ 0 & \text{si } |a| > r. \end{cases}$$

Exercice 3.4.5. Le but de cet exercice est de prouver que le corps des nombres complexes est algébriquement clos [1]. Soit $\mathbf{K}$ une extension finie du corps $\mathbf{C}$.

(a) Montrer qu'il existe une norme $\|-\|$ sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{K}$ telle que

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

pour tous $x, y \in \mathbf{K}$. Dans la suite, le corps $\mathbf{K}$ sera considéré comme une algèbre de Banach.

(b) Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbf{K}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbf{K}$. On dit que f est $\mathbf{K}$-*dérivable* si, pour tout $a \in \mathbf{K}$, la limite

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe dans $\mathbf{K}$. On dit qu'une fonction $f : \mathrm{U} \to \mathbf{K}$ admet une primitive sur U s'il existe une fonction $\mathbf{K}$-dérivable $\mathrm{F} : \mathrm{U} \to \mathbf{K}$ telle que $\mathrm{F}'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{U}$. Montrer que, lorsque U est simplement connexe, toute fonction $\mathbf{K}$-dérivable admet une primitive.

(c) Vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathbf{K}$-dérivable sur $\mathbf{K} \smallsetminus \{0\}$.

(d) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'ouvert $\mathbf{R}^n \smallsetminus \{0\}$ est simplement connexe.

(e) Montrer que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. (On pourra procéder par l'absurde en montrant que si $\mathbf{K} \neq \mathbf{C}$, alors, pour tout lacet γ dans $\mathbf{C} \smallsetminus \{0\}$, on a $\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = 0$.)

5. La formule intégrale de Cauchy

Lemme 3.5.1. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{C}$ *muni d'un point* $a \in \mathrm{U}$, *et* $g : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *une fonction continue dont la restriction à* $\mathrm{U} \smallsetminus \{a\}$ *soit holomorphe. La forme différentielle* $\omega = g\mathrm{d}z$ *est localement exacte.*

Démonstration. Il suffit de prouver que ω est localement exacte sur un voisinage ouvert de a dans U. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que U est un disque ouvert de $\mathbf{C}$. En vertu du lemme 3.2.5, il suffit de vérifier que, pour tout triangle $\mathrm{T} \subset \mathrm{U}$, on a $\int_{\partial \mathrm{T}} \omega = 0$. Si $\mathrm{T} \subset \mathrm{U} \smallsetminus \{a\}$, alors on applique le théorème de Cauchy. Il reste à traiter le cas où $a \in \mathrm{T}$. Pour cela, on procède en distinguant deux sous cas.

Si a est dans l'intérieur de T, on considère, pour tout réel λ, $0 < \lambda \leqslant 1$, l'homothétie h_λ de centre de a et de rapport λ. On obtient un

1. On donnera deux autres preuves, aux numéros 4.1.12 et 5.2.7.

nouveau triangle $T_\lambda = h_\lambda(T)$. Il est clair que ∂T et ∂T_λ sont des lacets homotopes dans $U \smallsetminus \{a\}$, et donc, en vertu du corollaire 3.2.8, on a

$$\int_{\partial T} \omega = \int_{\partial T_\lambda} \omega .$$

Soit M une borne supérieure des modules $|g(z)|$, $z \in T$, et ℓ le périmètre du triangle T. Le lemme 3.2.3 appliqué au chemin ∂T_λ nous donne l'inégalité

$$\Big| \int_{\partial T} \omega \Big| \leqslant M\lambda\ell$$

pour $0 < \lambda \leqslant 1$. On en déduit que $\int_{\partial T} \omega = 0$.

Il reste à étudier le cas où a appartient au bord de T. On choisit alors un réel $\varepsilon > 0$, et un triangle $T_1 \subset T$ de U tel que $|z - a| < \varepsilon$ pour tout $z \in T_1$, et tel que a soit sur le bord de T_1. Si a n'est pas un sommet de T, on peut imposer que a ne soit pas non plus un sommet de T_1. Dans tous les cas, on peut alors compléter la famille $\{T_1\}$ en une subdivision de T par une famille finie de triangles T_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, de sorte que $a \notin T_i$ pour $i \neq 1$. On a alors

$$\int_{\partial T} \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial T_i} \omega = \int_{\partial T_1} \omega .$$

Autrement dit, on peut supposer que T soit arbitrairement petit. Le lemme 3.2.3 appliqué au chemin ∂T nous dit alors que $|\int_{\partial T} \omega|$ doit être arbitrairement petit, et donc nul. □

Théorème 3.5.2 (Formule de Cauchy). *Soit* U *un ouvert de* **C**, *et* $f : U \to \mathbf{C}$ *une fonction holomorphe sur* U. *Soit* γ *un lacet de* U *homotope au lacet constant, et* a *un point de* U *n'appartenant pas à l'image de* γ. *Alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z = \mathrm{Ind}(\gamma, a) f(a).$$

Démonstration. Soit $g : U \to \mathbf{C}$ la fonction définie par

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z \neq a, \\ f'(a) & \text{si } z = a. \end{cases}$$

Cette fonction est continue en a et holomorphe en dehors de a. Il est clair que

$$\int_\gamma \omega = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z - \mathrm{Ind}(\gamma, a) f(a).$$

Or, en vertu du lemme 3.5.1, la forme différentielle $\omega = g\mathrm{d}z$ est localement exacte. Il résulte donc du théorème d'invariance par homotopie (2.5.16) que $\int_\gamma \omega = 0$, d'où ce théorème. □

Exemple 3.5.3. Soit $\bar{D}$ un disque fermé de centre 0 et de rayon $r > 0$. On considère une fonction holomorphe f sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ qui contient $\bar{D}$. Soit γ le lacet défini par $t \mapsto re^{2i\pi t}$. Comme l'espace $\bar{D}$ est simplement connexe, le lacet γ est homotope au lacet constant dans U, et $\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = 1$. Si D désigne l'intérieur de $\bar{D}$, et $a \in D$, on obtient la formule :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in D \\ 0 & \text{si } a \notin \bar{D}. \end{cases}$$

CHAPITRE 4

Applications classiques de la théorie de Cauchy

1. Développements en séries entières

Théorème 4.1.1. *Soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *une fonction holomorphe sur un ouvert* U *de* **C**. *On se donne un point* $a \in \mathrm{U}$ *ainsi qu'un disque ouvert* $\mathrm{D}(a, r)$, *de centre* a *et de rayon* $r > 0$, *tel que* $\mathrm{D}(a, r) \subset \mathrm{U}$. *Alors il existe une série entière* $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$, *de rayon de convergence* $\geqslant r$, *telle que*

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - a)^n$$

pour tout $z \in \mathrm{D}(a, r)$.

Démonstration. On peut supposer que $a = 0$. On choisit un nombre réel ρ de sorte que $0 < \rho < r$, et on applique la formule de Cauchy au lacet $\gamma(t) = \rho e^{2i\pi t}$. Pour $|z| < \rho$, on a alors

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z} \mathrm{d}u .$$

Considérons la fonction $u \mapsto \frac{1}{u-z}$ sur le cercle $\partial\mathrm{D}(0, \rho)$ de centre 0 et de rayon ρ. On a

$$\frac{1}{u - z} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{u^{n+1}},$$

et la majoration

$$\left|\frac{z^n}{u^{n+1}}\right| \leqslant \frac{|z|^n}{\rho^{n+1}}$$

montre que la série du membre de droite converge normalement sur le cercle $\partial\mathrm{D}(0, \rho)$. Puisque f est bornée sur ce cercle, cela implique que la série

$$\sum_{n \geqslant 0} \int_\gamma \frac{z^n f(u)}{u^{n+1}} \mathrm{d}u$$

est convergente, de somme $2i\pi f(z)$. On obtient ainsi

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$$

où $a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{z^n f(u)}{u^{n+1}}du$. Pour conclure, remarquons que les coefficients a_n sont indépendants de γ : la fonction f est infiniment dérivable sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon ρ, et on a

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n.$$

Cela implique la formule voulue pour $|z| < r$. □

COROLLAIRE 4.1.2. *Une fonction sur un ouvert du plan complexe est holomorphe si et seulement si elle est analytique.*

COROLLAIRE 4.1.3. *La fonction dérivée d'une fonction holomorphe est holomorphe.*

COROLLAIRE 4.1.4. *Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ une fonction continue sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Si la forme différentielle $\omega = f\,dz$ est localement exacte, alors, la fonction f est holomorphe.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte de la proposition 3.1.6 et du corollaire précédent. □

COROLLAIRE 4.1.5. *Si* U *est un ouvert de* $\mathbf{C}$ *et si* $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *est une fonction continue, holomorphe en dehors d'un point de* U, *alors f est holomorphe sur* U *tout entier.*

DÉMONSTRATION. En vertu du lemme 3.5.1, la forme différentielle $\omega = f\,dz$ est localement exacte. Soit $a \in \mathrm{U}$ tel que f soit holomorphe en dehors de $\{a\}$. Le théorème 2.4.4 implique donc que ω admet une primitive F sur un disque ouvert D de centre a contenu dans U. Or, d'après la proposition 3.1.6, une telle fonction F est holomorphe. Comme $\mathrm{F}' = f$, le corollaire précédent implique que f est holomorphe. □

COROLLAIRE 4.1.6. *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbf{C}$, $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *une fonction holomorphe, et z_0 un point de* U. *Les assertion suivantes sont équivalentes.*

(i) La fonction f est identiquement nulle.

(ii) La fonction f s'annule au voisinage de z_0.

(iii) Toutes les dérivées itérées $f^{(k)}(z_0)$ sont nulles, $k \geqslant 0$.

DÉMONSTRATION. Les implications (i)⇒(ii)⇒(iii) sont claires. Il suffit donc de prouver (iii)⇒(i). Supposons que $f^{(k)}(z_0) = 0$ pour tout $k \geqslant 0$, et considérons l'ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}$ des points $z \in \mathrm{U}$ tels que $f^{(k)}(z) = 0$ pour tout $k \geqslant 0$. Il va de soi que A est une intersection dénombrable de fermés de U, et donc est fermé dans U. De plus, A n'est pas vide, puisqu'il contient z_0. Pour terminer la démonstration, il suffit donc de prouver que A est aussi un ouvert. Or si $a \in \mathrm{A}$, en vertu du théorème 4.1.1, la fonction f est développable en série entière dans un disque ouvert contenant a et contenu dans U. De plus, les coefficients de la série sont des multiples des dérivées itérées $f^{(k)}(a)$. Il s'en suit que f est nulle au voisinage de a pour tout $a \in \mathrm{A}$, et donc que A est ouvert. □

COROLLAIRE 4.1.7. *Soit* U *un ouvert connexe de* **C** *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *une fonction holomorphe non nulle. L'ensemble des points où* f *s'annule est discret.*

COROLLAIRE 4.1.8. *Soit* U *un ouvert connexe et non vide de* **C**. *L'algèbre des fonctions holomorphes sur* U *est un anneau intègre.*

COROLLAIRE 4.1.9 (Inégalités de Cauchy). *Soit* $f : \mathrm{D}(0, r) \to \mathbf{C}$ *une fonction holomorphe sur le disque de centre* 0 *et de rayon* $r > 0$. *Pour* $0 < \rho < r$, *on pose* $\mathrm{M}_\rho = \sup_{|z|=\rho} |f(z)|$. *Alors, si*

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$$

est le développement en série entière de f *sur* $\mathrm{D}(0, r)$, *les coefficients vérifient l'inégalité*

$$|a_n| \leqslant \frac{\mathrm{M}_\rho}{\rho^n}.$$

DÉMONSTRATION. Soit γ le lacet $t \mapsto \rho e^{2i\pi t}$. On a les identités

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u^{n+1}} \mathrm{d}u.$$

La majoration est alors une simple application du lemme 3.2.3. □

REMARQUE 4.1.10. Sous les hypothèses du corollaire ci-dessus, on peut écrire la formule de Cauchy sous la forme

$$a_n \rho^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(\rho e^{i\theta}) \mathrm{d}\theta.$$

COROLLAIRE 4.1.11 (Théorème de Liouville). *Toute fonction holomorphe bornée sur* **C** *tout entier est constante.*

DÉMONSTRATION. On a

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$$

pour tout z, avec $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Soit $\mathrm{M} > 0$ tel que $|f(z)| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. Les inégalités de Cauchy impliquent que $|a_n| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\rho^n}$ pour tout $n \geqslant 0$ et tout $\rho > 0$. Il s'en suit que $a_n = 0$ pour tout n, et donc le corollaire 4.1.6 termine cette démonstration. □

COROLLAIRE 4.1.12 (Théorème de Gauß-d'Alembert). *Le corps des nombres complexes est algébriquement clos. Autrement dit, tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine.*

Démonstration. Soit f un polynôme complexe de degré $\geqslant 1$. Pour montrer que f admet au moins une racine, on procède par l'absurde. Si f ne s'annulait pas sur $\mathbf{C}$, la fonction $\frac{1}{f}$ serait une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$, et cette fonction serait bornée (car f est continue et $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$). D'après le théorème de Liouville, la fonction $\frac{1}{f}$ devrait donc être constante, ce qui impliquerait que f aurait la même propriété, et donnerait donc une contradiction. □

Remarque 4.1.13. Une autre preuve sera indiquée plus loin, comme application du théorème de Rouché (voir la Remarque 5.2.7).

2. Le principe du maximum

Lemme 4.2.1. *Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbf{C}$. On suppose que la partie réelle de $f(z)$ est nulle pour tout $z \in \mathrm{U}$. Alors f est une fonction localement constante (c'est-à-dire, est constante sur chacune des composantes connexes de* U*).*

Démonstration. On écrit $f(z) = \mathrm{P}(z) + i\mathrm{Q}(z)$, où P et Q sont deux fonctions à valeurs réelles de classe C^∞ sur U. si P est identiquement nulle, les équations de Cauchy-Riemann (voir remarque 3.1.7) impliquent que $d\mathrm{Q} = 0$, et donc que Q est localement constante. Il en est donc de même de $f = i\mathrm{Q}$. □

Proposition 4.2.2. *Soit* U *un ouvert connexe et non vide de* $\mathbf{C}$, *et $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ une fonctions holomorphe sur* U *telle que la fonction $z \mapsto |f(z)|$ soit constante. Alors la fonction f est constante.*

Démonstration. Soit C la valeur de $|f(z)|$ pour $z \in \mathrm{U}$. Si $\mathrm{C} = 0$, alors f est identiquement nulle sur U, et donc est constante. Sinon, quitte à remplacer f par $\frac{f}{\mathrm{C}}$, on peut supposer et on supposera que $\mathrm{C} = 1$. On choisit un point $z_0 \in \mathrm{U}$, et on note $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ l'ouvert formé des points $z \in \mathrm{U}$ tels que $|f(z) - f(z_0)| < 1$. On désigne par V_0 la composante connexe de V qui contient z_0. Soit $z \mapsto \log z$ une détermination du logarithme sur le disque ouvert $\mathrm{D}(f(z_0), 1)$ de centre $f(z_0)$ et de rayon 1. Pour tout $z \in \mathrm{V}_0$, la partie réelle de $\log(f(z))$ est nulle, puisque $1 = |f(z)| = |e^{\log(f(z))}|$, et donc, d'après le lemme précédent, la fonction $\log \circ f$ est constante sur V_0. Cela impique que $f = \exp \circ \log \circ f$ est une fonction constante sur V_0. Il s'en suit que la fonction f est constante au voisinage de chacun de ses points, et donc, par connexité de U, est constante. □

Théorème 4.2.3 (Principe du maximum). *Soit* U *un ouvert borné, connexe et non vide de* $\mathbf{C}$. *On se donne une fonction continue $f : \bar{\mathrm{U}} \to \mathbf{C}$ sur l'adhérence de* U, *dont la restriction à* U *soit holomorphe. On désigne par $\partial\mathrm{U} = \bar{\mathrm{U}} \smallsetminus \mathrm{U}$ la frontière de $\bar{\mathrm{U}}$. On a alors les propriétés suivantes.*

(i) *Le maximum de la fonction* $z \mapsto |f(z)|$ *est atteint sur la frontière* ∂U.
(ii) *Pour que ce maximum soit atteint en un point de* U, *il faut et il suffit que la fonction* f *soit constante.*

Démonstration. Puisque $\bar{U}$ est compact et f continue sur $\bar{U}$, le maximum est nécessairement atteint par un point de $\bar{U}$. Il suffit donc de prouver l'assertion (ii). Soit $z_0 \in U$ tel que $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$ pour tout $z \in \bar{U}$. On choisit un disque ouvert $D(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon $r > 0$, contenu dans U, et on pose

$$M_r = \sup_{|u|=r} |f(u + z_0)|.$$

Soit γ le lacet $t \mapsto z_0 + re^{2i\pi t}$. La formule intégrale de Cauchy (3.5.2) nous donne l'égalité

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

et on en déduit que

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{f(z_0 + re^{2i\pi t}) r 2i\pi e^{2i\pi t}}{z_0 + re^{2i\pi t} - z_0} dt \right| \leqslant \int_0^1 |f(z_0 + re^{2i\pi t})| dt \leqslant M_r$$

On remarque en outre que, par continuité de f, l'inégalité ci-dessus est stricte dès qu'il existe un point u tel que $|u| = r$ et $|f(z_0 + u)| < M_r$. Comme il existe un u tel que $|u| = r$ et $|f(u + z_0)| = M_r$, on a d'autre part l'inégalité $M_r \leqslant |f(z_0)|$. Autrement dit, on doit avoir

$$|f(z_0)| = M_r.$$

Cela implique que, pour tout u tel que $|u| = r$, on a $|f(u + z_0)| = M_r$ (puisque sinon, on a vu que cela implique $|f(z_0)| < M_r$). En faisant varier r, on en déduit que la fonction $z \mapsto |f(z)|$ est constante au voisinage de z_0. La proposition 4.2.2 nous assure donc que la fonction f est constante au voisinage de z_0. Comme U est connexe, le principe des zéros isolés (ou encore le corollaire 4.1.6) implique que la fonction f est constante. □

3. Lemme de Schwarz

On désigne par D le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 dans **C**.

Lemme 4.3.1 (Lemme de Schwarz). *Soit* $f : D \to D$ *une fonction holomorphe telle que* $f(0) = 0$. *On a alors les propriétés suivantes.*
(i) *Pour tout* $z \in D$, *on a* $|f(z)| \leqslant |z|$.
(ii) *S'il existe un point* $z_0 \in D \setminus \{0\}$ *tel que* $|f(z_0)| = |z_0|$, *la fonction* f *est une homothétie* $z \mapsto \lambda z$ *(avec* $|\lambda| = 1$*).*

Démonstration. La fonction $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ est holomorphe sur le disque épointé $D \setminus \{0\}$, et elle se prolonge par continuité en zéro. Ce prolongement est encore holomorphe en vertu du corollaire 4.1.5. Le principe du maximum appliqué à la restriction de g au disque fermé de centre 0 et de rayon $r > 0$ montre que, pour tout z tel que $|z| \leqslant r$, on a

$$|g(z)| \leqslant \sup_{|u|=r} \frac{|f(u)|}{r} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Par conséquent, en faisant tendre r vers 1, on voit que, pour tout z tel que $|z| < 1$, on a $|g(z)| \leqslant 1$, ce qui démontre l'assertion (i). Supposons de plus qu'il existe un point $z_0 \in D \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Alors le maximum de g est atteint dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon $r > 0$ pour tout $r > |z_0|$. Cela implique que g est constante sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon r, avec $|z_0| < r < 1$. La connexité de D implique donc que g est une constante, ce qui prouve l'assertion (ii). □

Une application du lemme de Schwarz est la déterminations des automorphismes du disque unité, ce que nous allons développer ci-dessous.

Définition 4.3.2. Soient U et V deux ouverts de **C**. Une application inversible $f : U \to V$ est appelée un *difféomorphisme holomorphe*, ou encore une *transformation holomorphe*, si les deux applications f et f^{-1} sont holomorphes.

Si U est un ouvert de **C**, les transformations holomorphes $U \to U$ forment un groupe, noté Aut(U), et appelé le *groupe des automorphismes de* U.

Deux ouverts U et V de **C** seront dits *isomorphes* s'il existe un transformation holomorphe de U sur V.

Exemple 4.3.3. Bien que le plan complexe soit homéomorphe à tout disque ouvert, il n'existe pas de transformation holomorphe entre le disque unité ouvert et le plan complexe tout entier. En effet, s'il existait une tranformation holomorphe f du plan complexe vers le disque unité, en vertu du théorème de Liouville, la fonction f serait constante (puisque bornée), ce qui contredirait l'injectivité de f.

Exercice 4.3.4. Montrer que l'application

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

est une transformation holomorphe du demi-plan de Poincaré

$$H = \{x + iy \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ et } y > 0\}$$

sur le disque unité ouvert D. En déduire un isomorphisme de groupes $\mathrm{Aut}(H) \simeq \mathrm{Aut}(D)$.

Lemme 4.3.5. *Soit* $z_0 \in \mathrm{D}$. *On note* h_{z_0} *la fonction*
$$z \mapsto \frac{z + z_0}{1 + z\bar{z}_0}.$$
On a alors les propriétés suivantes.

(i) On a $h_{z_0}(z) \in \mathrm{D}$ *pour tout* $z \in \mathrm{D}$.

(ii) La fonction h_{-z_0} *est l'inverse de* h_{z_0}.

En particulier, h_{z_0} *induit un automorphisme du disque* D.

Démonstration. Il est clair que cette formule définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{\frac{1}{\bar{z}_0}\}$. L'assertion (ii) résulte d'un calcul direct et facile, que nous laissons au lecteur. Il reste à prouverl'assertion (i). D'autre part, pour $|z| = 1$, on a
$$|h_{z_0}(z)| \frac{1}{|\bar{z}|} = \left| \frac{z + z_0}{\bar{z} + \bar{z}_0} \right| = 1.$$
Le principe du maximum nous assure donc que $|h_{z_0}(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathrm{D}$. □

Remarque 4.3.6. On peut vérifier que les fonctions du type h_{z_0} ne forment pas un sous-groupe de Aut(D).

Définition 4.3.7. Une *homographie* est une application $h : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ de la forme
$$z \mapsto h(z) = \lambda \frac{z + z_0}{1 + z\bar{z}_0}$$
où $z_0 \in \mathrm{D}$ et $|\lambda| = 1$.

On remarque que, d'après le lemme ci-dessus, toute homographie définit un automorphisme du disque D.

Proposition 4.3.8. *Les automorphismes du disque unité ouvert* D *sont exactement les homographies.*

Démonstration. Soit $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ un automorphisme. On pose $z_0 = f(0)$, et on définit h par
$$h(z) = \frac{z + z_0}{1 + z\bar{z}_0}.$$
Il est clair que $h(0) = z_0$. Par conséquent, l'automorphisme $g = h^{-1} \circ f$ envoie 0 sur lui même. On en déduit, par l'assertion (i) du lemme 4.3.1, que $|g(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathrm{D}$. Pour la même raion, on a aussi $|g^{-1}(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathrm{D}$. Il s'en suit que $|g(z)| = |z|$ pour tout $z \in \mathrm{D}$. L'assertion (ii) du lemme 4.3.1 implique donc qu'il existe un nombre complexe λ, de module 1 tel que g soit la multiplication par λ. Pour tout $z \in \mathrm{D}$, on a donc
$$f(z) = h(\lambda z) = \frac{\lambda z + z_0}{1 + \lambda z\bar{z}_0} = \lambda \frac{z + a}{1 + z\bar{a}}$$
avec $a = \bar{\lambda} z_0$, ce qui montre que f est bien une homographie. □

Remarque 4.3.9. On verra plus loin, comme application de la théorie des fonctions méromorphes, que les seuls automorphismes du plan complexe sont les tranformations affines (corollaire 5.1.16). Une étude plus approfondie des transformations holomorphes en général sera faite au chapitre 7.

4. Fonctions harmoniques

Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. On désigne par $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur U, et par Harm(U) celui des fonctions $f : \mathrm{U} \to \mathbf{R}$ de classe C^2 et harmoniques [1]. On rappelle que la partie réelle d'une fonction holomorphe est toujours harmonique.

Proposition 4.4.1. *Si* U *est connexe et simplement connexe, l'application* $\mathbf{R}$*-linéaire* $\mathscr{H}(\mathrm{U}) \to \mathrm{Harm}(\mathrm{U})$, *qui associe à une fonction holomorphe sa partie réelle, est surjective, de noyau* $i\mathbf{R}$.

Démonstration. La description du noyau vient du lemme 4.2.1 (pour cela, on n'a besoin que de la connexité de U). Il nous reste donc à prouver la surjectivité. Soit P une fonction harmonique sur $\mathrm{U} \subset \mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$. On veut trouver une fonction réelle Q sur U telle que les équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}. \end{cases}$$

soient vérifée (voir remarque 3.1.7). On considère la forme différentielle

$$\omega = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\mathrm{d}y.$$

Elle est de classe C^1 sur U. De plus, l'annulation du laplacien de P implique qu'on a $\mathrm{d}\omega = 0$. En vertu des théorèmes 2.6.9 et 2.4.4, la forme différentielle ω admet donc une primitive Q. On pose alors $f = \mathrm{P} + i\mathrm{Q}$. On a ainsi obtenu une fonction holomorphe dont la partie réelle est P. □

L'hypothèse que l'ouvert U soit simplement connexe est indispensable. Voici un contre-exemple.

Exercice 4.4.2. Montrer que la fonction définie sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ par

$$\mathrm{P}(z) = \frac{1}{2}\log(z\bar{z})$$

est harmonique et de classe C^∞, et vérifier que ce n'est pas la partie réelle d'une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

---

1. On rappelle que cela signifie que le laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y^2}$ s'annule sur U.

COROLLAIRE 4.4.3. *Soit* U *un ouvert de* **C**. *Toute fonction* $f : \mathrm{U} \to \mathbf{R}$, *harmonique de classe* C^2, *est de classe* C^∞.

DÉFINITION 4.4.4. Une fonction continue $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *a la propriété de la moyenne* si, pour tout disque fermé $\bar{\mathrm{D}} \subset \mathrm{U}$, centré en $z \in \mathrm{U}$ et de rayon $r > 0$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \mathrm{d}t.$$

EXEMPLE 4.4.5. La formule de Cauchy montre que toute fonction holomorphe a la propriété de la moyenne. Il en est de même de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

COROLLAIRE 4.4.6. *Toute fonction harmonique de classe* C^2 *sur un ouvert de* **C** *a la propriété de la moyenne.*

EXERCICE 4.4.7. Montrer que, dans les hypothèses du théorème 4.2.3, on peut remplacer la condition pour f d'être holomorphe par celle d'avoir la propriété de la moyenne (en particulier, on peut demander que f soit harmonique et de classe C^2 sur U).

REMARQUE 4.4.8. On peut démontrer que toute fonction continue (à valeurs réelles) sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$, ayant la propriété de la moyenne est harmonique de classe C^2. La preuve utilise l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Dirichlet (que l'on peut aborder tout à fait élégamment via la théorie des fonctions holomorphes). On en trouve un exposé détaillé et tout-à-fait accessible au paragraphe 4 du chapitre IV du livre de Cartan [**Car61**].

Par ailleurs, il est possible d'aborder la théorie des fonctions harmoniques d'une autre manière (point de vue développé dans le livre de Rudin [**Rud98**, Chapitre 11]) : le problème de Dirichlet peut être étudié via l'analyse réelle, sans mention de la théorie des fonctions holomorphes (grâce à la théorie de la transformation de Fourier des fonctions périodiques à une variable réelle) ; partant de là, on peut démontrer directement le principe du maximum pour les fonctions harmoniques et aussi donner une autre preuve de la proposition 4.4.1, (localement) plus explicite.

CHAPITRE 5

Fonctions méromorphes

1. Points singuliers et séries de Laurent

Définition 5.1.1. Une *série de Laurent* est une somme formelle de la forme $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ où $a_n \in \mathbf{C}$ (autrement dit, c'est une famille de nombre complexes $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ que l'on interprète comme une série).

On dit qu'une série de Laurent $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ est *convergente* sur une partie U de $\mathbf{C}$ si les deux séries de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} a_{-n} z^n$ convergent uniformément sur tout compact de U.

Remarque 5.1.2. Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, et R′ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_{-n} z^n$, alors la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ converge, et donc définit une fonction holomorphe, sur la couronne

$$\mathrm{C} = \left\{ z \in \mathbf{C} \;\middle|\; \frac{1}{\mathrm{R}'} < |z| < \mathrm{R} \right\}.$$

Théorème 5.1.3. *Soient* $0 \leqslant \rho' < \rho$ *des nombres réels. On considère une fonction holomorphe* $f : \mathrm{C} \to \mathbf{C}$*, où*

$$\mathrm{C} = \left\{ z \in \mathbf{C} \;\middle|\; \rho' < |z| < \rho \right\}.$$

Alors il existe une unique série de Laurent $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ *qui converge sur* C *vers* f*. Les coefficients* a_n*,* $n \in \mathbf{Z}$*, sont donnés par la formule*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z,$$

où γ_r *est le lacet* $t \mapsto re^{2i\pi t}$*, avec* $\rho' < r < \rho$*.*

Démonstration. On commence par démontrer l'unicité. Soient R et R′ les rayons de convergence respectifs des séries

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} a_{-n} z^n.$$

On doit avoir $\frac{1}{\mathrm{R}'} \leqslant \rho'$ et $\rho \leqslant \mathrm{R}$. Soit r un nombre réel tel que $\rho' < r < \rho$. Pour chaque entier $k \in \mathbf{Z}$, chacune des séries

$$\frac{1}{z^{k+1}} \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{z^{k+1}} \sum_{n\geqslant 1} a_{-n} z^{-n}$$

converge normalement sur le cercle défini par la condition $|z| = r$. On en déduit que

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{k+1}} \mathrm{d}z = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \int_{\gamma_r} \frac{z^n}{z^{k+1}} \mathrm{d}z.$$

Or, pour tout entier $m \neq -1$, la forme différentielle $z^m \mathrm{d}z$ admet une primitive, ce qui implique, en vertu du théorème 3.2.1, que $\int_{\gamma_r} z^m \mathrm{d}z = 0$. Autrement dit, nous devons avoir

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{k+1}} \mathrm{d}z = a_k \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2i\pi a_k.$$

Il reste à démontrer l'existence de la série de Laurent. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on pose

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

On remarque que, comme la fonction $\frac{f(u)}{u^{n+1}}$ est holomorphe, le théorème 2.5.16 implique que le coefficient a_n ne dépend pas du choix de r. On choisit à présent deux réels r' et r tels que $\rho' < r' < r < \rho$. On veut montrer que $f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$ pour tout z tel que $r' < z < r$ (cela terminera la preuve puisque tout point de C vérifie cette propriété pour r et r' adéquats). Pour cela, quitte à composer f avec une petite rotation, on peut toujours supposer que z n'est pas réel. Soit α le lacet défini par $\alpha(t) = (1-t)r' + tr$. On définit un chemin γ dans la couronne C par la formule

$$\gamma = \bar{\alpha} \cdot (\gamma_r \cdot (\alpha \cdot \bar{\gamma}_{r'}))$$

(on rappelle que si σ est un chemin, $\bar{\sigma}$ désigne son chemin opposé, voir l'exercice 2.3.6 (v)). On vérifie que le chemin γ est homotope au lacet constant dans C : une homotopie h de $\gamma_{r'} \cdot \bar{\gamma}_{r'}$ vers γ est donnée par la formule

$$h(s,t) = \Big(\bar{\alpha} \cdot (\gamma_{\alpha(s)} \cdot (\alpha \cdot \bar{\gamma}_{r'}))\Big)(t),$$

et il est clair que $\gamma_{r'} \cdot \bar{\gamma}_{r'}$ est homotope au chemin constant (2.5.12). Comme ce chemin γ ne passe pas par z, la formule de Cauchy (3.5.2) nous donne donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)}{u-z} \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2i\pi} \Big(-\int_{\gamma_{r'}} \frac{f(u)}{u-z} \mathrm{d}u + \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u-z} \mathrm{d}u \Big). \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit donc de constater que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u-z} \mathrm{d}u = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(u)}{u-z} \mathrm{d}u = \sum_{n \geqslant 1} a_{-n} z^{-n}.$$

La première égalité se démontre en suivant *mutatis mutandis* la fin de la preuve du théorème 4.1.1 (on ne répètera donc pas l'argument ici). Pour la seconde, on procède essentiellement de la même manière, mais en écrivant

$$\begin{aligned}\frac{1}{u-z} &= -\frac{1}{z\left(1-\frac{u}{z}\right)} \\ &= -\sum_{n\geqslant 1}\frac{u^{n-1}}{z^n}.\end{aligned}$$

Or cette série est normalement convergente pour $|u| = r'$, et donc

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r'}}\frac{f(u)}{u-z}\mathrm{d}u &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r'}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{u^{n-1}}{z^n}f(u)\mathrm{d}u \\ &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{b_n}{z^n}\end{aligned}$$

avec

$$b_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r'}} f(u)u^{n-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r'}}\frac{f(u)}{u^{-n+1}}\mathrm{d}u.$$

La série entière $\sum_{n\geqslant 1} b_n x^n$ a donc un rayon de convergence $\geqslant \frac{1}{r'}$. On a ainsi montré que la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ converge vers $f(z)$ dans la couronne C. □

Corollaire 5.1.4. *Soit f une fonction holomorphe sur une couronne* C *de la forme*

$$\mathrm{C} = \left\{z \in \mathbf{C} \,\middle|\, \rho' < |z| < \rho\right\}.$$

Il existe une fonction holomorphe g, sur le disque défini par $|z| < \rho$, et une fonction holomorphe h, sur la couronne définie par $|z| > \rho'$, telles que les conditions suivantes soient satisfaites.

(i) Pour tout $z \in$ C, on a $f(z) = g(z) - h(z)$.

(ii) On a

$$\lim_{z\to\infty} h(z) = 0.$$

De plus, cette décomposition de f est unique.

Démonstration. L'existence de cette décomposition résulte de la description de f par une série de Laurent : si on a

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n,$$

on pose

$$g(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \quad \text{et} \quad h(z) = -\sum_{n\geqslant 1} a_{-n} z^{-n}.$$

Montrons l'unicité. Pour cela, on peut supposer que $f = 0$, et nous devons alors montrer que $g = 0$ et $h = 0$. Comme $g(z) = h(z)$ pour tout $z \in \mathrm{C}$, il existe une unique fonction $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ telle que

$$\varphi(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si } |z| < \rho, \\ h(z) & \text{si } |z| > \rho'. \end{cases}$$

Cette fonction est holomorphe (car g et h le sont), et il résulte de la condition (ii) qu'elle est bornée. Le théorème de Liouville (corollaire 4.1.11) implique par conséquent que φ est une fonction constante. Comme sa limite lorsque z tend vers le point à l'infini est nulle, cette constante doit être zéro. □

5.1.5. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$, $a \in \mathrm{U}$, et $f : \mathrm{U} \setminus \{a\} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Sur la couronne définie par $0 < |z - a| < r$ (avec $r > 0$ assez petit), on peut écrire le développement de f en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - a)^n.$$

Remarquons que, dans ce cas, la série $\sum_{n \geqslant 1} a_{-n} x^n$ a un rayon de convergence infini (puisque z peut s'approcher de a autant qu'on veut).

Définition 5.1.6. Sous les hypothèses du numéro 5.1.5, on dit que a est un *point singulier pour f* si l'un des coefficients a_n est non nul pour $n < 0$.

On dit que a est un *pôle de f* si a est un point singulier pour f et si l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ tels que $a_{-n} \neq 0$ est fini. On appelle alors *ordre du pôle a* le plus grand entier n tel que $a_{-n} \neq 0$. Un *pôle simple* est un pôle d'ordre 1.

On dit que a est une *singularité essentielle* si a est un point singulier tel que $a_{-n} \neq 0$ pour une infinité de valeurs de $n \geqslant 1$.

Exemple 5.1.7. La fonction $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, avec 0 pour singularité essentielle.

Remarque 5.1.8. Si a n'est pas un point singulier pour f, alors f se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe sur U tout entier.

Définition 5.1.9. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$. Une *fonction méromorphe* sur U est une fonction de la forme $f = \frac{g}{h}$, où g et h sont deux fonctions holomorphes sur U, avec h non identiquement nulle.

Remarque 5.1.10. Comme l'algèbre $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ des fonctions holomorphes sur U est intègre (cf. corollaire 4.1.8), on peut considérer son corps des fractions : c'est exactement l'ensemble des fonctions méromorphes sur U.

Remarque 5.1.11. Si $f = \frac{g}{h}$ est une fonction méromorphe sur U, on peut la voir comme une fonction holomorphe $\mathrm{U} \setminus \mathrm{A} \to \mathbf{C}$, où A est lieu des zéros de h. On rappelle que A est nécessairement un sous-ensemble discret de U (cf. corollaire 4.1.7), de sorte que, au voisinage de chaque point a de A, on se retrouve dans la situation du numéro 5.1.5. Dans ce cas, toutes les singularités pour la fonction f sont des pôles. En effet, on a alors deux possibilités : ou bien $h(a) \neq 0$, et alors, au voisinage de a, la fonction $\frac{1}{h}$ est holomorphe, ce qui implique qu'il en est de même de f, ou bien $h(a) = 0$. Comme h n'est pas identiquement nulle, le corollaire 4.1.6 nous assure que $h(z) = k(z)(z-a)^n$, où k est une fonction holomorphe définie au voisinage de a, et telle que $k(a) \neq 0$, et $n \geqslant 1$ est un entier. On en déduit aussitôt que a est un pôle d'ordre n de la fonction f. L'énoncé suivant donne une réciproque (locale).

Proposition 5.1.12. *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbf{C}$, $A \subset U$ *un sous-ensemble fini de points, et* $f : U \smallsetminus A \to \mathbf{C}$ *une fonction holomorphe. On suppose que, pour tout* $a \in A$ *qui est singulier pour* f*, le point* a *est un pôle de* f*. Alors il existe un polynôme* P *tel que la fonction* $z \to P(z)f(z)$ *se prolonge en une fonction holomorphe sur* U*. En particulier,* f *provient d'une unique fonction méromorphe sur* U*.*

Démonstration. Soit $a \in A$ un point singulier. Alors, pour $n \geqslant 1$ assez grand, la fonction $(z-a)^n f(z)$ est holomorphe sur $U \smallsetminus A'$, où $A' = A \smallsetminus \{a\}$. On conclut par une récurrence évidente sur le cardinal de A. □

Proposition 5.1.13. *Sous les hypothèses du numéro* 5.1.5*, le point* a *est singulier pour* f *si et seulement si la fonction* f *n'est pas bornée au voisinage de* a*.*

Démonstration. La remarque ci-dessus (5.1.11) implique que, si a n'est pas singulier, alors f est continue, et donc bornée, au voisinage de a. Réciproquement, supposons que f soit bornée au voisinage de a. Pour simplifier les notations, on supposera que $a = 0$ (ce qui n'altère en rien le degré de généralité de la preuve). Cela signifie, que l'on peut choisir $r > 0$ de sorte qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leqslant M$ pour tout z vérifiant $0 < |z| < r$. En reprenant les notations du théorème 5.1.3, on a alors

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{M}{\rho^n}$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout $0 < \rho < r$. Lorsque $n < 0$, cela entraîne que $a_n = 0$. □

Théorème 5.1.14 (Weierstraß). *Soit* D *le disque de centre* 0 *et de rayon* $\rho > 0$*, et* $f : D \smallsetminus \{0\} \to \mathbf{C}$ *une fonction holomorphe. On suppose que* 0 *est une singularité essentielle pour* f*. Alors , pour* $0 < \varepsilon < \rho$*, l'image par* f *de la couronne* C_ε*, définie par* $0 < |z| < \varepsilon$*, est partout dense dans* $\mathbf{C}$*.*

Démonstration. Soit V l'ensemble des points $b \in \mathbf{C}$ tels qu'il existe un réel $r > 0$, de sorte que la condition $0 < |z| < \varepsilon$ entraîne $|f(z)-b| > r$. Pour tout $b \in \mathrm{V}$, la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)-b}$ est à la fois holomorphe et bornée sur la couronne C_ε. La proposition 5.1.13 implique alors que la fonction g se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de 0. Autrement dit, la fonction $f = b + \frac{1}{g}$ est méromorphe sur le disque D, ce qui est impossible (puiqu'elle admet une singularité esssentielle). On a donc $\mathrm{V} = \varnothing$. □

Corollaire 5.1.15. *Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. On suppose qu'il existe un réel $\mathrm{R} > 0$ tel que l'image par f des points z tels que $|z| > \mathrm{R}$ ne forme pas une partie dense du plan complexe. Alors f est une fonction polynômiale.*

Démonstration. Le théorème 4.1.1 implique qu'il existe une série entière de rayon de convergence infini telle que, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on ait

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n.$$

Considérons la fonction $g(z) = f(\frac{1}{z})$. C'est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \smallsetminus \{0\}$ dont le développement en série de Laurent au voisinage de zéro est de la forme

$$g(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^{-n}.$$

Si f vérifie les hypothèses de la proposition, alors, en vertu du théorème de Weierstraß (5.1.14), le point 0 est un pôle de g. Autrement dit, les coefficients a_n sont nuls pour n assez grand. □

Corollaire 5.1.16. *Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une transformation holomorphe. Alors il existe un unique couple $(a, b) \in (\mathbf{C} \smallsetminus \{0\}) \times \mathbf{C}$ tel que $f(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.*

Démonstration. La fonction f est en particulier un homéomorphisme. L'image de la couronne des z tels que $|z| > 1$ ne rencontre pas l'image du disque unité ouvert. En vertu du corollaire 5.1.15, la fonction f est donc un polynôme non constant de degré $n \geqslant 1$. Le corps des nombres complexes étant algébriquement clos (4.1.12), étant donné que la fonction polynômiale $f - f(0)$ est injective, elle admet 0 pour seule racine, nécessairement de multiplicité n. Cela implique que

$$f(z) = (f(1) - f(0))z^n + f(0).$$

Il s'en suit que f envoie les n racines n-èmes de l'unité sur $f(1)$. L'injectivité de f implique donc que $n = 1$. □

2. Calcul des résidus

DÉFINITION 5.2.1. Soit f une fonction holomorphe sur le complémentaire d'un point a d'un ouvert U de $\mathbf{C}$. On appelle *résidu de f au point a* le nombre $\operatorname{Res}(f,a) = c_{-1}$ où $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(z-a)^n$ est le développement en série de Laurent de f au voisinage de a (cf. théorème 5.1.3).

REMARQUE 5.2.2. En fait, $\operatorname{Res}(f,a)$ est un invariant (de la classe de cohomologie) de la forme différentielle $\omega = f\mathrm{d}z$, plutôt que de la fonction f ; il serait donc plus approprié d'utiliser la notation $\operatorname{Res}(\omega,a)$. Ceci dit, cette subtilité est très peu apparente dans le cadre restreint de ce cours, et on pourra la négliger.

THÉORÈME 5.2.3 (Théorème des résidus). *Soient* U *un ouvert de* $\mathbf{C}$, $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}$ *un sous-ensemble discret, et f une fonction holomorphe sur* $\mathrm{U} \setminus \mathrm{A}$. *On considère un lacet γ de* U, *homotope au lacet constant dans* U, *et qui évite les points de* A. *Alors l'ensemble des points $a \in \mathrm{A}$ tels que* $\operatorname{Ind}(\gamma,a) \neq 0$ *est fini, et*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{a\in\mathrm{A}} \operatorname{Res}(f,a)\operatorname{Ind}(\gamma,a).$$

DÉMONSTRATION. Montrons la première assertion. Vu que que A est discret, si on choisit une homotopie h de γ vers le lacet constant dans U, et si K désigne l'image de l'espace compact $[0,1]^2$ par h, alors, $\mathrm{A}\cap\mathrm{K}$ est un ensemble fini (puisque compact, et recouvert par les ouverts $\{a\}$, $a \in \mathrm{A}\cap\mathrm{K}$). Notons A_γ l'ensemble des points $a \in \mathrm{A}$ qui ne sont pas dans K, et posons $\mathrm{V} = \mathrm{U} \setminus \mathrm{A}_\gamma$. Alors γ est homotope au lacet constant dans V, de sorte que $\operatorname{Ind}(\gamma,x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{V}$. Tous les termes de l'égalité ont donc bien un sens. De plus, on déduit de ces préliminaires que, quitte à remplacer U par V et A par $\mathrm{A}\cap\mathrm{K}$, on peut supposer (et on supposera) que A est un ensemble fini de points. Pour chaque point $a \in \mathrm{A}$, la fonction f admet un développement en série de Laurent au voisinage du point a, de la forme

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_{a,n}(z-a)^n.$$

On pose

$$\varphi_a(z) = \sum_{n\geqslant 1} c_{a,-n}(z-a)^{-n}$$

La fonction φ_a est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{a\}$ (en faisant tendre ρ' vers zéro dans l'énoncé du théorème 5.1.3, on voit que la série qui définit φ_a a un rayon de convergence *infini*). Posons

$$\varphi = \sum_{a\in\mathrm{A}} \varphi_a.$$

C'est une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{C} \setminus \mathrm{A}$. D'autre part, la fonction $f - \varphi$ se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert U. Comme γ est homotope au lacet constant dans U, le théorème de Cauchy (3.2.1) implique que

$$\int_\gamma (f - \varphi) \mathrm{d}z = 0.$$

Vu que, par construction, $\mathrm{Res}(f, a) = \mathrm{Res}(\varphi_a, a)$ pour tout $a \in \mathrm{A}$, il suffit donc de prouver que

$$\int_\gamma \varphi \mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{a \in \mathrm{A}} \mathrm{Res}(\varphi_a, a) \mathrm{Ind}(\gamma, a).$$

Il suffit même de démontrer que, pour tout $a \in \mathrm{A}$, on a

$$\int_\gamma \varphi_a \mathrm{d}z = 2i\pi \mathrm{Res}(\varphi_a, a) \mathrm{Ind}(\gamma, a).$$

On a clairement

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \varphi_a \mathrm{d}z = \sum_{n \geqslant 1} c_{a,n} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} res(\varphi_a, a), .$$

Comme la forme différentielle $\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^m}$ admet une primitive dès que $m \neq 1$, on obtient donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \varphi_a \mathrm{d}z = c_{a,-1} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \mathrm{Res}(\varphi_a, a) \mathrm{Ind}(\gamma, a),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

COROLLAIRE 5.2.4. *Soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *et* $g : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *deux fonctions holomorphes sur un ouvert non vide et connexe de* $\mathbf{C}$. *On suppose que* g *n'est pas constante sur* U. *Notons* A *le lieu des zéros de* g. *Alors, pour tout lacet* γ *de* U, *homotope au lacet constant et évitant les points de* A, *on a l'égalité*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{g(z)} \mathrm{d}z = \sum_{a \in \mathrm{A}} \mathrm{Res}\Big(\frac{f}{g}, a\Big) \mathrm{Ind}\Big(\gamma, a\Big).$$

DÉMONSTRATION. Le principe des zéros isolés implique que A est un sous-espace discret. On conclut par le théorème des résidus. □

PROPOSITION 5.2.5. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{C}$, *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *une fonction holomorphe sur* U. *On suppose que* f *n'est pas constante au voisinage de* a. *On note* m *la multiplicité de* a *dans* f *(c'est-à-dire le plus grand entier* $m \geqslant 0$ *tel que la fonction* $f(z)(z-a)^{-m}$ *se prolonge par continuité en* a*). Alors on a l'égalité*

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{f'}{f}, a\Big) = m.$$

Démonstration. Si $m = 0$, alors $f(a) \neq 0$, et donc la fonction $\frac{f'}{f}$ est holomorphe au voisinage de a, d'où

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = 0$$

(pour tout lacet γ de $\mathbf{C} \setminus \{a\}$ assez proche de a et tel que $\mathrm{Ind}(\gamma, a) = 1$). On peut donc supposer que $m > 0$. Quitte à faire opérer une translation adéquate, on peut supposer que $a = 0$. Au voisinage de zéro, la fonction f s'écrit comme un produit de la forme

$$f(z) = g(z)z^m$$

avec g une fonction holomorphe telle que $g(0) \neq 0$. On a donc

$$f'(z) = g'(z)z^m + mg(z)z^{m-1},$$

d'où encore

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{m}{z}.$$

Or la fonction $\frac{g'}{g}$ est holomorphe au voisinage de 0, et donc

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, 0\right) = \mathrm{Res}\left(\frac{g'}{g}, 0\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{m}{z}, 0\right) = m,$$

ce qui termine la démonstration. □

Le résultat suivant exprime le fait que, en perturbant une fonction holomorphe de façon raisonnable, on ne change pas le nombre de ses zéros (comptés avec multiplicités).

Théorème 5.2.6 (Rouché). *Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{C}$. *On se donne un lacet* $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{U}$, *homotope au lacet constant, et tel que, pour tout point* z *de* U *qui ne se trouve pas dans l'image de* γ, *on ait* $0 \leqslant \mathrm{Ind}(\gamma, z) \leqslant 1$. *Pour une fonction holomorphe* $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *qui ne s'annule pas sur l'image de* γ, *on désigne par* N_f *le nombre de zéros de* f *(comptés avec multiplicités) qui sont entourés par* γ. *Autrement dit, en notant*

$$\mathrm{A}_\gamma = \{a \in \mathrm{U} \mid f(a) = 0 \text{ et } \mathrm{Ind}(\gamma, a) \neq 0\},$$

on pose

$$\mathrm{N}_f = \sum_{a \in \mathrm{A}_\gamma} \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right).$$

Soient f *et* g, *deux fonctions holomorphes sur* U. *On suppose que* f *ne s'annule pas sur l'image de* γ, *et que, pour tout* z *dans l'image de* γ, *on a*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Alors g *ne s'annule pas sur l'image de* γ, *et on a* $\mathrm{N}_f = \mathrm{N}_g$.

Démonstration. Il est clair que g ne s'annule pas sur l'image de γ : si $g(z) = 0$ avec z dans l'image de γ, alors $|f(z)| < |f(z)|$, ce qui est absurde. Le théorème des résidus (5.2.3) implique que

$$N_u = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u'(z)}{u(z)} dz$$

pour toute fonction holomorphe $u : U \to \mathbf{C}$ qui ne s'annule pas sur l'image de γ. On remarque alors que

$$\int_\gamma \frac{u'(z)}{u(z)} dz = \int_\gamma u^*\Big(\frac{dz}{z}\Big) = \int_{u\circ\gamma} \frac{dz}{z}.$$

On veut donc prouver que

$$\operatorname{Ind}(f \circ \gamma, 0) = \operatorname{Ind}(g \circ \gamma, 0).$$

En vertu de l'assertion (ii) de la proposition 3.4.3, il suffit donc de prouver que les lacets $\alpha = f \circ \gamma$ et $\beta = g \circ \gamma$ sont homotopes dans $\mathbf{C} \smallsetminus \{0\}$. Pour tout $(s, t) \in [0, 1]^2$, si on pose $z = \gamma(t)$, on a

$$|s\beta(t) + (1 - s)\alpha(t)| \geqslant |f(z)| - |s(f(z) - g(z))| \geqslant |f(z)| - |f(z) - g(z)| > 0.$$

On en déduit que l'application

$$h : [0, 1]^2 \to \mathbf{C} \smallsetminus \{0\}\,, \quad (s, t) \mapsto s\beta(t) + (1 - s)\alpha(t)$$

est bien définie, et est une homotopie de α vers β dans $\mathbf{C} \smallsetminus \{0\}$. □

Remarque 5.2.7. On peut donner une autre preuve du théorème de Gauß-d'Alembert (4.1.12), peut être plus intuitive que la précédente. Considérons un polynôme complexe P, de degré $n \geqslant 1$ et de coefficient directeur a. Pour $r > 0$, notons N_r le nombre de zéros de P contenus dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon r. Pour montrer que P admet n racines (comptées avec multiplicités), il suffit de prouver que

$$n = \lim_{r\to+\infty} N_r.$$

Il est clair que c'est le cas pour le polynôme az^n. En vertu du théorème de Rouché (5.2.6), il suffit donc de prouver que, pour $|z|$ assez grand, on a

$$|P(z) - az^n| < |P(z)|,$$

ce qui résulte facilement du fait que le degré du polynôme $P(z) - az^n$ est strictement plus petit que celui du polynôme $P(z)$.

La variante suivante du théorème de Rouché, essentiellement due à Hurwitz, sera utilisée de nombreuses fois par la suite.

Corollaire 5.2.8. *Soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbf{C}$, et $a \in U$. On considère le disque fermé $\bar{D}$ de centre a et de rayon $r > 0$ tel que $\bar{D} \subset U$, et tel que $f(z) \neq 0$ pour $|z - a| = r$. Posons*

$$\varepsilon = \inf_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Alors $\varepsilon > 0$. *De plus, pour tout entier* $m \geqslant 0$, *les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La fonction* f *admet* m *zéros, comptés avec multiplicités, à l'intérieur de* $\bar{\mathrm{D}}$.

(ii) *Toute fonction holomorphe* $g : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *telle que*

$$\sup_{|z-a|=r} |f(z) - g(z)| < \varepsilon$$

admet m *zéros, comptés avec multiplicités, à l'intérieur de* $\bar{\mathrm{D}}$.

Démonstration. Le fait que ε soit non nul résulte du fait que $\varepsilon = |f(z_0)|$ avec $|z_0 - a| = r$ (par continuité de f et compacité du cercle), et de l'hypothèse faite sur $\bar{\mathrm{D}}$. Il est tautologique que (ii) implique (i). Pour la réciproque, on remarque que, pour $|z-a| = r$, on a

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \leqslant |f(z)|.$$

On conclut donc immédiatement par le théorème de Rouché (appliqué au lacet qui parcourt le bord de $\bar{\mathrm{D}}$ dans le sens direct). □

Proposition 5.2.9. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{C}$, *et* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de fonctions holomorphes sur* U *qui converge uniformément vers une fonction holomorphe* f *sur tout compact de* U. *On suppose que* f *n'est constante sur aucune composante connexe de* U. *Alors, pour tout* $a \in \mathrm{U}$, *les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La fonction* f *s'annule en* a.

(ii) *Pour tout* $r > 0$, *il existe un entier* $n_0 \geqslant 0$ *tel que, pour tout* $n \geqslant n_0$, *la fonction* f_n *s'annule en un point du disque ouvert de centre* a *et de rayon* r.

Démonstration. Soit $r > 0$. Quitte à le rétrécir, on peut supposer que le disque fermé $\bar{\mathrm{D}}$, de centre a et de rayon r, soit dans U, et de sorte que $f(z) \neq 0$ pour $|z-a| = r$ (si $f(a) \neq 0$, cela provient de la continuité de f, et si $f(a) = 0$, cela résulte du principe des zéros isolés). D'autre part, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{|z-a|=r} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

En vertu du corollaire 5.2.8, il existe donc un entier $n_0 \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \geqslant 0$, la fonction f_n s'annule sur l'intérieur de $\bar{\mathrm{D}}$ si et seulement si la fonction f a la même propriété. On en déduit que (i) implique (ii). Réciproquement, supposons la condition (ii) vérifiée. Pour tout $r > 0$, l'ensemble A_r des points $z \in \mathrm{U}$ tels que $|z-a| < r$ et $f(z) = 0$ est non vide. On en déduit l'existence d'une suite de zéros de f qui converge vers a, d'où $f(a) = 0$. [1] □

1. Voici une alternative à la fin de cette démonstration. Si on ne veut pas choisir de suite convergeant vers a, on peut aussi procéder comme suit. En vertu du principe des zéros isolés, A_r est discret, et comme il est aussi borné, c'est un espace compact, ce qui implique que A_r ne contient qu'un nombre fini d'éléments.

Corollaire 5.2.10. *Soit* U *un ouvert de* **C**, *et* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de fonctions holomorphes sur* U *qui converge uniformément vers une fonction holomorphe* f *sur tout compact de* U. *On suppose que* f *n'est constante sur aucune composante connexe de* U. *Si, pour tout* $n \geqslant 0$, *la fonction* f_n *ne s'annule nulle part sur* U, *la fonction* f *a la même propriété.*

Corollaire 5.2.11. *Soit* U *un ouvert de* **C**. *On se donne une suite* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *de fonctions holomorphes sur* U *qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction holomorphe* f *sur* U. *On suppose que* f_n *est une fonction injective pour tout* $n \geqslant 0$ *et que* f *n'est constante sur aucune composante connexe de* U. *Alors la fonction* f *est injective.*

Démonstration. Soient a_1 et a_2 deux points de U. Supposons que $f(a_1) = f(a_2) = b$. Soit $r > 0$. Pour $i = 1, 2$, on considère le disque ouvert D_i, de centre a_i et de rayon $r > 0$. Pour n assez grand, en vertu de la proposition 5.2.9 appliquée à la suite des fonctions $f_n - b$, on peut trouver $z_i \in D_i \cap U$ tel que $f_n(z_i) = b$ pour $i = 0, 1$. Comme f_n est injective, il faut que $z_1 = z_2$. En particulier, on a $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$ pour tout $r > 0$. Cela implique que $a_1 = a_2$. □

Comme $A_r \subset A_s$ pour $0 < r < s$, et comme A_r est contenu dans la boule ouverte de centre a et de rayon r, il faut donc que $A_r = \{a\}$ pour $r > 0$ assez petit.

CHAPITRE 6

L'espace des fonctions holomorphes

1. Convergence des suites de fonctions holomorphes

Soit X un espace topologique et $f : \mathrm{X} \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Si $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$ est un sous-espace compact, on note

$$\|f\|_{\mathrm{K}} = \sup_{x \in \mathrm{K}} |f(x)|.$$

Proposition 6.1.1. *Soit $(f_n)_{\geqslant 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert $\mathrm{U} \subset \mathbf{C}$, et soit $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ une fonction. On suppose que cette suite converge uniformémement vers f sur tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$. Alors la fonction f est holomorphe.*

Démonstration. La propriété pour f d'être holomorphe étant de nature locale, on peut supposer, sans perte de généralité, que U est simplement connexe. On sait que la fonction f est nécessairement continue. Pour vérifier que f est holomorphe, il suffit donc, d'après le corollaire 4.1.4, de prouver que la forme différentielle $\omega = f\,\mathrm{d}z$ est exacte sur U. En vertu du théorème 2.4.4, il suffit de prouver que, pour tout lacet de classe C^1 par morceaux γ de U, on a $\int_\gamma \omega = 0$. Soit γ un tel lacet, et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Si K désigne l'image de γ, et si $m > 0$ est un majorant de la longueur de γ, il existe un entier $\mathrm{N} \geqslant 0$ tel que, pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait

$$\|f_n - f\|_{\mathrm{K}} \leqslant \frac{\varepsilon}{m}.$$

Or d'après le théorème de Cauchy (3.2.1), on a $\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z = 0$ pour tout n, et donc

$$\Big|\int_\gamma \omega\Big| = \Big|\int_\gamma (f_n - f)\mathrm{d}z\Big|.$$

Le lemme 3.2.3 implique par conséquent que $|\int_\gamma \omega| \leqslant \varepsilon$. Vu que $\varepsilon > 0$ a été choisi arbitrairement, cela prouve que $\int_\gamma \omega = 0$, et achève ainsi la démonstration de cette proposition. □

Exemple 6.1.2. La série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ définit une fonction holomorphe sur $\mathrm{U} = \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$, et, pour tout $z \notin \mathbf{Z}$, on a l'égalité

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2}.$$

Démonstration de 6.1.2. Montrons tout d'abord la convergence de la série. Considérons un compact $K \subset U$ et choisissons un réel $r > 0$ qui majore absolument la partie réelle de tout point $z \in K$. Alors, pour tout entier $n > r$, et tout $z \in K$, on a $|z-n| \geqslant n-r$, d'où

$$\frac{1}{|z-n|^2} \leqslant \frac{1}{(n-r)^2}.$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge uniformément (puisque normalement) sur K. D'autre part, si on note $f_n(z) = \frac{1}{(z-n)^2}$, on remarque $f_{-n}(z) = f_n(-z)$, et que, pour toute partie finie $A \subset \mathbf{Z}$, on a

$$\sum_{n\in A} \|f_n\|_K \leqslant \|f_0\|_K + \sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_K + \sum_{n\geqslant 1} \|f_{-n}\|_K.$$

On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge uniformément sur tout compact. Posons

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2}.$$

La fonction f est périodique de période 1 et holomorphe sur U (d'après la proposition 6.1.1), tout comme la fonction g (qui est méromorphe sur $\mathbf{C}$). Au voisinage de 0, la fonction

$$h(z) = f(z) - \frac{1}{z^2}$$

est holomorphe. On en conclut que la fonction f est méromorphe au voisinage de 0, d'après la proposition 5.1.12. D'autre part, le développement en série entière de la fonction sinus nous informe que $z = 0$ est un pôle d'ordre 2 de la fonction g, de sorte que, au voisinage de 0, on a

$$g(z) = \frac{1}{z^2} + k(z),$$

où k est une fonction holomorphe définie sur un voisinage ouvert de 0. En particulier, la fonction $f - g$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de 0 en une fonction holomorphe $h - k$. Comme $f-g$ est 1-périodique et holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}$, on en conclut que la fonction $f - g$ se prolonge en une fonction holomorphe sur tout le plan complexe. Pour montrer que cette fonction est nulle, on va démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel A tel que pour tout nombre complexe z dont la valeur absolue de la partie imaginaire majore A, on ait

$$|f(z)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |g(z)| \leqslant \varepsilon.$$

Cela impliquera que $f = g$: en effet, en vertu du théorème de Liouville (corollaire 4.1.11) on en déduira que $f-g$ est constante, et donc que $|f(z) - g(z)| \leqslant 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $z \in \mathbf{C}$, d'où $f = g$. Pour la suite, on écrit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbf{R}$. Les simples inégalités triangulaires donnent

$$|\sin \pi z| = \frac{|e^{-\pi y + i\pi x} - e^{\pi y - i\pi x}|}{2} \geqslant \frac{|e^{-\pi y} - e^{\pi y}|}{2}.$$

On en déduit que $g(z) < \varepsilon$ dès que $|y|$ est assez grand. Il reste donc à étudier $|f(z)|$ pour $|y|$ assez grand. Lorsque $|x| \leqslant \frac{1}{2}$, pour tout $n > 0$, on a

$$\frac{1}{|z-n|^2} \leqslant \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2},$$

ce qui montre que la série $\sum_{n>0} \frac{1}{(z-n)^2}$ est normalement convergente sur ce domaine. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc un entier $\mathrm{N} > 0$ tel que

$$\sum_{n \geqslant \mathrm{N}} \frac{1}{|z-n|^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

dès que $|x| \leqslant \frac{1}{2}$. D'autre part, comme on a $|z-n| \geqslant |y|$ pour tous z et n, il existe un réel $\mathrm{A} > 0$ tel que, pour $|y| > \mathrm{A}$, on ait

$$\sum_{n < \mathrm{N}} \frac{1}{|z-n|^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, pour $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|y| > \mathrm{A}$, on a $|f(z)| < \varepsilon$. Comme f est 1-périodique, cela prouve que $|f(z)| < \varepsilon$ dès que $|y| > \mathrm{A}$, et termine ainsi la preuve. □

Remarque 6.1.3. L'exemple ci-dessus permet de retrouver l'égalité bien connue

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

de la manière suivante. On a

$$\sin \pi z = \pi z - \frac{1}{6}\pi^3 z^3 + z^5(\cdots) = \pi z\Big(1 - \frac{\pi^2 z^2}{6} + z^4(\cdots)\Big).$$

L'inverse se calcule donc, pour ses premiers termes, sous la forme

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi z}\Big(1 + \frac{\pi^2 z^2}{6} + z^4(\cdots)\Big).$$

On en déduit que

$$g(z) = \frac{1}{z^2}\Big(1 + \frac{\pi^2 z^2}{6} + z^4(\cdots)\Big)^2 = \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + z^2(\cdots).$$

Puisque $f = g$, cela donne

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2 f(z) - 1}{2z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2 g(z) - 1}{2z^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Proposition 6.1.4. *Soit* U *un ouvert de* **C**, *et* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *de fonctions continues sur* U. *On considère une famille* $\mathscr{D}$ *de disques fermés contenus dans* U *tels que* $\mathrm{U} = \bigcup_{\mathrm{D}\in\mathscr{D}} \mathrm{D}$. *Pour que cette suite de fonctions converge uniformément sur tout compact de* U, *il faut et il suffit qu'elle converge uniformément sur tout élément de* $\mathscr{D}$.

Démonstration. On vérifie facilement que si une suite de fonctions converge uniformément sur tout élément de $\mathscr{D}$, alors elle converge uniformément sur toute réunion finie d'élément de $\mathscr{D}$. Comme tout compact de U est contenu dans une réunion finie d'élément de $\mathscr{D}$, cela montre que c'est une condition suffisante. Il est trivial que cette condition est nécessaire. □

Théorème 6.1.5. *Soit* U *un ouvert de* **C**. *Si une suite* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *de fonctions holomorphes sur* U *converge uniformément vers une fonction holomorphe* f *sur tout compact de* U, *alors la suite des dérivées* $(f_n')_{n\geqslant 0}$ *converge uniformément vers* f' *sur tout compact de* U.

Démonstration. D'après la proposition 6.1.4, il suffit de prouver la convergence uniforme sur tout disque fermé $\bar{\mathrm{D}} \subset \mathrm{U}$ de rayon $r > 0$ de sorte que le disque fermé de même centre que $\bar{\mathrm{D}}$ mais de rayon $2r$ soit lui aussi contenu dans U. Pour toute fonction holomorphe g sur U, et pour tout $z \in \bar{\mathrm{D}}$, en dérivant sous le signe somme, on obtient la formule

$$g'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(u)}{(u-z)^2}\mathrm{d}u\,,$$

où γ est le chemin $t \mapsto c + 2re^{2i\pi t}$, c désignant le centre de $\bar{\mathrm{D}}$. Or la suite de fonctions

$$(z,u) \mapsto \frac{f_n(u)}{(u-z)^2}$$

converge uniformément sur $\bar{\mathrm{D}} \times \Sigma$, où Σ désigne le cercle de centre c et de rayon $2r$. Il s'en suit que la suite $(f_n')_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f' sur $\bar{\mathrm{D}}$. □

2. Topologie des fonctions holomorphes

6.2.1. Étant donné un espace topologique X, on notera $\mathscr{C}(\mathrm{X})$ l'algèbre des fonctions continues $\mathrm{X} \to \mathbf{C}$. On considère $\mathscr{C}(\mathrm{X})$ comme un **C**-espace vectoriel topologique avec la topologie définie par la famille de normes $\|-\|_{\mathrm{K}}$, où K parcourt les sous-espaces compacts de X. On appelle *topologie uniforme* la topologie définie par cette famille de normes. Une base de voisinages de 0 dans $\mathscr{C}(\mathrm{X})$ est donnée par les sous-ensembles de la forme

$$\mathrm{V}_{\mathrm{K},\varepsilon} = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathrm{X}) \;\middle|\; \|f\|_{\mathrm{K}} \leqslant \varepsilon \right\}$$

pour $K \subset X$ un sous-espace compact et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Il est bien connu que $\mathscr{C}(X)$ est un espace séparé et complet pour cette topologie.

Lorsque X est compact, la topologie uniforme coïncide avec la topologie associée à la norme $\|-\|_X$, de sorte que $\mathscr{C}(X)$ peut alors être considéré comme une algèbre de Banach. Cependant, lorsque X est pas compact, il est tout-à-fait possible qu'il n'existe pas de norme sur $\mathscr{C}(X)$ qui définisse la topologie uniforme ; cf. remarque 6.4.3.

Définition 6.2.2. Soit X un espace topologique. Une *suite exhaustive de compacts de* X est une suite $(K_n)_{\geqslant 0}$ de sous-espaces compacts de X vérifiant les propriétés suivantes.

(i) Le sous-espace K_n est contenu dans l'intérieur de K_{n+1} pour tout $n \geqslant 0$.
(ii) L'espace X est la réunion des sous-espaces K_n, $n \geqslant 0$.

Remarque 6.2.3. Si X admet une telle suite exhaustive de compacts, alors tout compact de X contient l'un des K_n. De plus, pour qu'une suite de fonctions converge uniformément sur tout compact de X, il faut et il suffit qu'elle converge uniformément sur chacun des sous-espaces K_n.

Remarque 6.2.4. Si X admet une suite exhaustive de compacts, alors il est *localement compact* : il existe une base de voisinages relativement compacts. Pour le voir, on choisit une suite exhaustive $(K_n)_{\geqslant 0}$ de sous-espaces compacts de X. Si x est un point de X, il appartient à K_n pour n assez grand, et donc à l'intérieur de K_{n+1}. Il existe donc un ouvert V contenant x et contenu dans un sous-espace compact de X. Les ouverts de V contenant x formant une base de voisinages de x, on en déduit l'existence d'une base de voisinages relativement compacts de x dans X. En particulier, un tel espace est nécessairement séparé.

Lemme 6.2.5. *Soit $n \geqslant 0$ un entier. Tout ouvert* U *de* $\mathbf{R}^n$ *admet au moins une suite exhaustive de compacts.*

Démonstration. On choisit un sous-ensemble dénombrable et partout dense A dans U : il suffit par exemple de considérer les points de coordonnées rationnelles. On choisit une bijection

$$a : \mathbf{N} \to A.$$

Pour chaque entier $k \geqslant 0$, on choisit un entier $m_k > 0$ tel que la boule fermée, de centre a_k et de rayon $\frac{1}{m_k}$, soit dans U. Pour $n \geqslant 0$, on note K_n la réunion des boules fermées $\bar{B}(a_k, \frac{n}{m_k(n+1)})$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Les compacts K_n forment une suite exhaustive de compacts de U. □

Proposition 6.2.6. *Soit* X *un espace topologique admettant une suite exhaustive de compacts (par exemple, un ouvert de* $\mathbf{R}^n$*, d'après le lemme*

6.2.5*). L'espace* $\mathscr{C}(\mathrm{X})$ *est métrisable (autrement dit, il existe une distance sur* $\mathscr{C}(\mathrm{X})$ *telle que la convergence au sens de celle-ci soit exactement la notion de convergence uniforme sur tout compact de* X*).*

Esquisse de preuve. On commence par choisir une suite exhaustive de compacts $(\mathrm{K}_n)_{\geqslant 0}$ de X. Pour deux fonctions continues f et g sur X, on pose

$$d(f,g) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n} \min\{1, \|f-g\|_{\mathrm{K}_n}\}.$$

On vérifie aussitôt que cette définition a un sens (la série du terme de droite converge) et que cela défini une distance sur l'espace $\mathscr{C}(\mathrm{X})$. Le reste de la démonstration est laissé à titre d'exercice (on pourra consulter par exemple [**Car61**, Chapitre V] pour une preuve complète). □

On rappelle que, pour un ouvert U de **C**, on désigne par $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ l'algèbre des fonctions holomorphes $\mathrm{U} \to \mathbf{C}$.

Proposition 6.2.7. *Le sous-espace* $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ *des fonctions holomorphes sur* U *est fermé dans* $\mathscr{C}(\mathrm{U})$ *pour la topologie uniforme. En particulier,* $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ *est un espace de Fréchet.*

Démonstration. Comme $\mathscr{C}(\mathrm{U})$ est un espace métrisable (proposition 6.2.6), il suffit de vérifier que $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ est stable par passage à la limite des suites. Cette proposition n'est donc qu'une reformulation de la proposition 6.1.1. □

3. Le théorème d'Ascoli

Définition 6.3.1. Soit X un espace topologique. Une partie A de $\mathscr{C}(\mathrm{X})$ est dite *bornée*, si, pour tout sous-espace compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$, la fonction $f \mapsto \|f\|_{\mathrm{K}}$ est bornée sur A.

Remarque 6.3.2. Si X est compact, une partie A de $\mathscr{C}(\mathrm{X})$ est bornée si et seulement si la fonction

$$f \mapsto \|f\|_{\mathrm{X}} = \sup_{x\in \mathrm{X}} |f(x)|$$

est bornée sur A.

Remarque 6.3.3. La notion de partie bornée ne dépend pas de la famille de normes avec laquelle on travaille, mais seulement de la structure d'espace vectoriel topologique, dans le sens suivant. Une partie A de $\mathscr{C}(\mathrm{X})$ est bornée si et seulement si, pour tout voisinage V de 0 dans $\mathscr{C}(\mathrm{X})$, il existe un scalaire $\lambda > 0$ tel que $\lambda \mathrm{A} \subset \mathrm{V}$. (Cette propriété ne sera pas utilisée dans la suite, et nous laissons la preuve en exercice.)

Remarque 6.3.4. Si U et un ouvert de **C**, et si on considère $\mathscr{C}(\mathrm{U})$ muni de la distance d construite dans la preuve de la proposition

6.2.6, on voit qu'une partie A de $\mathscr{C}(\mathrm{U})$ est bornée si et seulement si elle est bornée au sens de la distance d.

Définition 6.3.5. Soit X un espace topologique. Une partie $\mathrm{A} \subset \mathscr{C}(\mathrm{X})$ est dite *équicontinue* si, pour tout $x_0 \in \mathrm{X}$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que, pour tout $f \in \mathrm{A}$ et pour tout $x \in \mathrm{V}$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

L'exemple suivant ainsi que la proposition 6.3.7 ne sont donnés ici qu'à titre d'illustrations, et ils ne seront pas utilisés dans la suite de ces notes.

Exemple 6.3.6. Soient X et T deux espaces topologiques, avec T compact. Soit $f : \mathrm{T} \times \mathrm{X} \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Pour $t \in \mathrm{T}$, on note $f_t \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ la fonction définie par $f_t(x) = f(t,x)$. Alors

$$\mathrm{A} = \left\{ f_t \mid t \in \mathrm{T} \right\}$$

est une partie fermée, bornée et équicontinue de $\mathscr{C}(\mathrm{X})$. C'est aussi une partie compacte de $\mathscr{C}(\mathrm{X})$.

En effet, pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$, on a

$$\|f_t\|_{\mathrm{K}} \leqslant \|f\|_{\mathrm{T}\times\mathrm{K}},$$

d'où on déduit que A est bornée (on rappelle que, en vertu du théorème de Tykhonov, $\mathrm{T} \times \mathrm{K}$ est compact). Vérifions que A est équicontinue. On veut montrer que, pour tout $x_0 \in \mathrm{X}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que, pour tout $t \in \mathrm{T}$, on ait

$$|f(t,x) - f(t,x_0)| < \varepsilon.$$

Or, par définition de la topologie produit, et vu que f est continue, pour tout $t \in \mathrm{T}$, il existe un voisinage ouvert U_t de t dans T et un voisinage ouvert V_t de x_0 dans X tels que, pour tout $(s,x) \in \mathrm{U}_t \times \mathrm{V}_t$, on ait $|f(s,x) - f(t,x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme T est compact, il existe une suite finie $t_1, \ldots, t_m$ dans T telle que la famille U_{t_i} recouvre T. Posons

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_{t_1} \cap \cdots \cap \mathrm{V}_{t_m}.$$

Alors, pour tout $t \in \mathrm{T}$ et tout $x \in \mathrm{V}$, comme $t \in \mathrm{U}_{t_i}$ pour un certain indice i, on a

$$|f(t,x) - f(t,x_0)| < |f(t,x) - f(t_i,x_0)| + |f(t_i,x_0) - f(t,x_0)| < \varepsilon.$$

Cela montre que A est équicontinue. On en déduit aussi que l'application $t \mapsto f_t$ est continue sur T. Comme T est compact, cela implique que son image, à savoir A, est compacte, et donc fermée, dans $\mathscr{C}(\mathrm{X})$.

Proposition 6.3.7. *On considère un espace topologique séparé* X. *Soit* A *une partie équicontinue de* $\mathscr{C}(\mathrm{X})$, *et* $\bar{\mathrm{A}}$ *son adhérence. Alors* $\bar{\mathrm{A}}$ *est équicontinue.*

Démonstration. On fixe un réel $\varepsilon > 0$ et un point $x_0 \in \mathrm{X}$. Alors il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour tout $f \in \mathrm{A}$ et tout $x \in \mathrm{V}$, on ait

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $g \in \bar{\mathrm{A}}$. Si $\bar{\mathrm{V}}$ désigne l'adhérence de V, pour chaque compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$, il existe alors $f_{\mathrm{K}} \in \mathrm{A}$ telle que

$$\|f_{\mathrm{K}} - g\|_{\bar{\mathrm{V}} \cap \mathrm{K}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si $x \in \mathrm{V}$, comme X est séparé, on peut trouver un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$ qui contient à la fois x_0 et x (par exemple, $\mathrm{K} = \{x_0, x\}$). On a donc, en posant $f = f_{\mathrm{K}}$:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &\leqslant |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - g(x_0)| \\ &\leqslant 2\|f - g\|_{\mathrm{K} \cap \bar{\mathrm{V}}} + |f(x) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Cela montre que $\bar{\mathrm{A}} \subset \mathscr{C}(\mathrm{X})$ est équicontinue. □

Lemme 6.3.8. *Soit* X *un espace topologique localement compact et* A *une partie de* $\mathscr{C}(\mathrm{X})$, *munie de la topologie induite. La fonction*

$$\mathrm{A} \times \mathrm{X} \to \mathbf{C}, \quad (f, x) \mapsto f(x)$$

est continue.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ un réel et $z \in \mathbf{C}$. Montrons que

$$\mathrm{U} = \Big\{(f, x) \in \mathrm{A} \mid |f(x) - z| < \varepsilon\Big\}$$

est un ouvert de $\mathrm{A} \times \mathrm{X}$. Soit $(f, x) \in \mathrm{U}$. Posons

$$\varepsilon_0 = \varepsilon - |f(x) - z|.$$

Notons W_0 l'ensemble des points $y \in \mathrm{X}$ tels que $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Comme X est localement compact, on peut trouver un voisinage relativement compact W de x, contenu dans W_0. Soit V l'ensemble des fonctions $g \in \mathrm{A}$ telles que

$$\|g - f\|_{\bar{\mathrm{W}}} < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Alors, pour tout $(g, y) \in \mathrm{V} \times \mathrm{W}$, on a

$$|g(y) - z| \leqslant |g(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)| + |f(x) - z| < \varepsilon.$$

Autrement dit, nous venons de prouver que U est un voisinage de chacun de ses points, et donc est un ouvert. □

Lemme 6.3.9 (l'argument de la diagonale). *Soit* E *un groupe abélien topologique métrisable et complet. On se donne une partie fermée* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ *vérifiant la propriété suivante : il existe une base de voisinages de zéro* $\mathscr{V}$ *dans* E *telle que, pour toute suite* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *à valeurs dans* A, *pour tout*

$\mathrm{V} \in \mathscr{V}$, *il existe une sous-suite* $(v_n)_{n\geqslant 0}$ *de* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *telle que, pour tous* $m, n \geqslant 0$, *on ait*

$$v_n - v_m \in \mathrm{V}\,.$$

Alors A *est compact.*

Démonstration. Comme E est métrisable, on peut trouver une famille de voisinages de zéro de la forme

$$\ldots \subset \mathrm{V}_{n+1} \subset \mathrm{V}_n \subset \ldots \subset \mathrm{V}_0 = \mathrm{E}\,, \qquad n \geqslant 0,$$

telle que

$$\bigcap_{n\geqslant 0} \mathrm{V}_n = \{0\}\,.$$

Soit A une partie de E vérifiant la propriété énoncée ci-dessus, et soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs dans A. On construit par une récurrence évidente une suite de suites

$$(u_{m,k})_{k\geqslant 0}\,, \quad m \geqslant 0,$$

ayant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $m > 0$, $(u_{m,k})_{k\geqslant 0}$ est une suite extraite de $(u_{m-1,k})_{k\geqslant 0}$;

(ii) pour tout $m \geqslant 0$ et tous $k, l \geqslant 0$, on a

$$u_{m,k} - u_{m,l} \in \mathrm{V}_m\,.$$

On définit alors la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$v_n = u_{n,n}\,, \quad n \geqslant 0.$$

C'est une suite extraite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge dans A (puisqu'elle est de Cauchy, avec E séparé et complet, et A fermé dans E). □

Théorème 6.3.10 (Ascoli). *Soit* X *un espace topologique admettant une suite exhaustive de compacts (par exemple, un espace topologique compact, ou bien un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ (6.2.5)*). Pour une partie* $\mathrm{A} \subset \mathscr{C}(\mathrm{X})$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) A *est compacte ;*

(ii) A *est fermée, bornée et équicontinue ;*

(iii) A *est fermée, équicontinue, et l'ensemble*

$$\mathrm{A}(x) = \Big\{f(x) \mid f \in \mathrm{A}\Big\}$$

est borné pour tout $x \in \mathrm{X}$.

Démonstration. Montrons que (i) implique (ii). Toute partie compacte A de $\mathscr{C}(\mathrm{X})$ est nécessairement fermée. Montrons qu'elle est équicontinue. Soit $x_0 \in \mathrm{X}$, et soit $\varepsilon > 0$ un réel. Comme, d'après la remarque 6.2.4, X est localement compact, il résulte du lemme 6.3.8 que la fonction

$$\varphi : (f, x) \mapsto f(x) - f(x_0)$$

est continue sur $\mathrm{A} \times \mathrm{X}$, de sorte que, si $\mathrm{D}(0, \varepsilon)$ désigne le disque de centre 0 et de rayon ε dans $\mathbf{C}$, l'ensemble $\mathrm{U} = \varphi^{-1}(\mathrm{D}(0, \varepsilon))$ est un ouvert de $A \times X$ qui contient le sous-ensemble $A \times \{x_0\}$. On peut donc trouver une famille d'ouverts de U de la forme $W_i \times V_i$, $i \in I$, où W_i est un ouvert de A et V_i un voisinage ouvert de x_0 dans X, de sorte que $\bigcup_{i \in I} W_i = A$. Comme A est compact, on peut imposer que l'ensemble d'indices I soit fini. Si on pose $V = \bigcap_{i \in I} V_i$, on a alors $x_0 \in V$ et aussi $A \times V \subset U$, ce qui montre l'équicontinuité de A. Le fait que l'image d'un compact par une fonction complexe continue soit bornée et la continuité des normes $\|-\|_K$ impliquent que A est bornée.

Le fait que (ii) implique (iii) est une trivialité : si $f \mapsto \|f\|_K$ est une fonction bornée sur A pour tout compact $K \subset X$, on conclut en contemplant les possibilités offertes par les compacts $\{x\}$, $x \in X$.

Il reste donc à prouver que (iii) implique (i). Soit A une partie de $\mathscr{C}(X)$ vérifiant la condition (iii). Montrons que A est compacte. Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'éléments de A, $\varepsilon > 0$, et $K \subset X$ un sous-espace compact. Comme $\mathscr{C}(X)$ est métrisable (6.2.6), et vu la description explicite des voisinages de zéro donnée au numéro 6.2.1, l'argument de la diagonale (6.3.9) nous montre qu'il suffit de prouver que, quitte à remplacer $(f_n)_{n \geqslant 0}$ par l'une de ses suites extraites,

$$\|f_m - f_n\|_K \leqslant \varepsilon$$

pour tous $m, n \geqslant 0$. Par équicontinuité, pour chaque $x \in X$, on peut choisir un voisinage V_x de x tel que, pour tout $y \in V_x$, on ait

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout $f \in A$. De plus, comme K est compact, on peut trouver un sous-ensemble fini $I \subset K$ tel que les ouverts V_i, $i \in I$, recouvrent K. D'autre part, $A(x)$ étant borné pour tout $x \in X$, on voit que la suite

$$n \mapsto (f_n(i))_{i \in I}$$

est bornée dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbf{C}^I$. Quitte à remplacer $(f_n)_{n \geqslant 0}$ par l'une de ses suites extraites, on peut donc supposer que

$$|f_m(i) - f_n(i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tous $m, n \geqslant 0$ et $i \in I$. Finalement, pour tout $x \in K$, comme $x \in V_i$ pour un certain $i \in I$, on obtient que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f_m(i)| + |f_m(i) - f_n(i)| + |f_n(i) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon,$$

d'où $\|f_m - f_n\|_K \leqslant \varepsilon$. $\square$

Remarque 6.3.11. Le théorème d'Ascoli affirme aussi que, avec des hypothèses adéquates sur X, toutes les parties fermées, bornées et équicontinues de $\mathscr{C}(X)$ sont obtenues suivant la procédure expliquée dans l'exemple 6.3.6 : on prend $T = A$, et $f(t, x) = f(x)$ avec $f = t \in T$.

Remarque 6.3.12. Signalons, pour terminer ce paragraphe, que le théorème d'Ascoli reste vrai avec des hypothèses bien plus générales (en particulier, l'hypothèse de l'existence d'une suite exhaustive de compacts n'est ici que pour simplificier l'exposition : elle permet d'exprimer les propriétés topologiques pertinentes dans le language des suites, et d'éviter le recours à l'axiome du choix non dénombrable).

4. Le théorème de Montel

Tout commence par l'observation de la conséquence suivante du principe du maximum pour les fonctions holomorphes.

Lemme 6.4.1. *Soit* U *un ouvert de* **C**. *Toute partie bornée de* $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ *est équicontinue.*

Démonstration. Soit A une partie bornée de $\mathscr{H}(\mathrm{U})$, et $z_0 \in \mathrm{U}$. On considère un disque ouvert $\mathrm{D} = \mathrm{D}(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon $r > 0$, dont l'adhérence soit contenue dans U. Comme A est bornée, on peut supposer donné un réel $\mathrm{M} > 0$ tel que $|f(z)| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $f \in \mathrm{A}$ et pour tout $z \in \mathrm{D}$. D'autre part, la fonction

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

se prolonge par continuité en z_0 en une fonction holomorphe sur U (d'après le corollaire 4.1.5). Le principe du maximum appliqué à g nous donne alors, pour tout $z \in \mathrm{D}$,

$$|g(z)| \leqslant \sup_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{r} \leqslant \frac{2\mathrm{M}}{r}.$$

Autrement dit, pour tout $z \in \mathrm{D}$, on a

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant \frac{2\mathrm{M}}{r} |z - z_0|.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé et assez petit, on définit l'ouvert

$$\mathrm{V} = \left\{ z \in \mathrm{U} \;\middle|\; |z - z_0| < \frac{\varepsilon r}{2\mathrm{M}} \right\}.$$

Alors, pour tout $f \in \mathrm{A}$ et pour tout $z \in \mathrm{V}$, on a $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. □

Théorème 6.4.2 (Montel). *Soit* U *un ouvert de* **C**. *Une partie de* $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ *est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Démonstration. Comme, en vertu de la proposition 6.2.7, $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ est fermé dans $\mathscr{C}(\mathrm{U})$, le théorème d'Ascoli (6.3.10) et le lemme 6.4.1 impliquent aussitôt l'assertion. □

Remarque 6.4.3. Pour tout ouvert non vide U de **C**, ni $\mathscr{C}(\mathrm{U})$ ni $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ ne sont des algèbres de Banach : si l'un de ces espaces vectoriels topologiques admettait une norme induisant sa topologie, en vertu du théorème de compacité de Riesz et du théorème de Montel ci-dessus, $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ devrait alors être un espace vectoriel de dimension finie ; or il est clair que $1, z, z^2, \dots, z^n, \dots$ forme une famille libre.

Lemme 6.4.4. *Soit* X *un espace topologique, et* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite à valeurs dans* X. *On suppose que l'ensemble* $\mathrm{A} = \{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ *est relativement compact dans* X *et a une unique valeur d'adhérence, notée* ℓ. *Alors la suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *converge vers* ℓ.

Démonstration. Si ce n'était pas le cas, il existerait voisinage V de ℓ dans X, ainsi qu'une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$, extraite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, à valeur dans le complémentaire de V. Or, l'adhérence de A étant compacte, une sous-suite de $(v_n)_{n\geqslant 0}$ doit converger dans X. Comme toute sous-suite convergente de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ doit converger vers ℓ, c'est absurde. □

Corollaire 6.4.5. *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbf{C}$, *et* $(f_n)_{\geqslant 0}$ *une suite de fonctions holomorphes sur* U. *On suppose que, pour tout disque fermé* $\bar{\mathrm{D}} \subset \mathrm{U}$, *la suite réelle* $(\|f_n\|_{\bar{\mathrm{D}}})_{n\geqslant 0}$ *est bornée. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) La suite $(f_n)_{\geqslant 0}$ *converge uniformément sur tout compact de* U.

(ii) Il existe un ouvert non vide V *de* U *tel que, pour tout* $z \in \mathrm{V}$, *la suite* $(f_n(z))_{n\geqslant 0}$ *converge.*

(iii) Il existe $z_0 \in \mathrm{U}$ *tel que, pour tout entier* $k \geqslant 0$, *la suite des* k*-èmes dérivées itérées en ce point* $(f_n^{(k)}(z_0))_{n\geqslant 0}$ *converge.*

Démonstration. Il est clair que la convergence uniforme de cette suite sur tout compact de U entraîne la condition (ii), et, en vertu du théorème 6.1.5, la condition (iii). Il reste donc à démontrer que (ii) ou (iii) implique (i). Supposons que (ii) ou (iii) soit vérifiée, posons

$$\mathrm{A} = \{f_n \,|\, n \in \mathbf{N}\},$$

et désignons par $\bar{\mathrm{A}}$ l'adhérence de A dans $\mathscr{H}(\mathrm{U})$. Le théorème de Montel (6.4.2) implique que $\bar{\mathrm{A}}$ est un sous-espace compact de $\mathscr{H}(\mathrm{U})$. Il suffit donc de prouver que l'ensemble A a exactement une valeur d'adhérence (lemme 6.4.4). Or, si g et h sont deux valeurs d'adhérence de A, le corollaire 4.1.6 appliqué à la fonction $g - h$ (qui est holomorphe, en vertu de la proposition 6.1.1) implique que $g = h$. □

Remarque 6.4.6. Dans la littérature, les parties bornées de $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ sont souvents appelées, suivant Montel, des *familles normales* de fonctions holomorphes. Le théorème de Montel se reformule alors en disant que toute suite de fonctions holomorphes à valeurs dans une famille normale admet une sous-suite dont la restriction à tout compact est de Cauchy au sens de la convergence uniforme.

CHAPITRE 7

Transformations holomorphes

1. Caractérisation locale

Théorème 7.1.1 (Théorème de l'application ouverte). *Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{C}$ *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *une application holomorphe. Si* f *n'est constante sur aucune composante connexe de* U, *alors c'est une application ouverte. De plus, pour tout point* $a \in \mathrm{U}$ *tel que* $f'(a) \neq 0$, *il existe un voisinage ouvert* V *de* a *dans* U *tel que l'application* f *induise une transformation holomorphe de* V *sur* $f(\mathrm{V})$.

Démonstration. Soit $a \in \mathrm{U}$ et $b = f(a)$. On peut trouver un disque ouvert D de centre a dont l'adhérence $\bar{\mathrm{D}}$ soit contenue dans U. En vertu du principe des zéros isolés, quitte à rétrécir D, on peut supposer que $f(z) \neq b$ lorsque z est sur le bord de $\bar{\mathrm{D}}$. Lorsque $c \in \mathbf{C}$ est proche de b (c'est-à-dire dans un disque de centre b et de rayon $\varepsilon > 0$ assez petit), la fonction $f - c$ est proche de $f - b$ dans $\mathscr{H}(\mathrm{U})$, et donc le corollaire 5.2.8 implique $f - c$ admet m zéros (comptés avec multiplicités) dans D, où $m > 0$ désigne l'ordre du zéro a de la fonction $f - b$. Il en résulte que f est une application ouverte. Si de plus $f'(a) \neq 0$, on a $m = 1$. Autrement dit, pour tout c proche de b, il existe un unique $z \in \mathrm{D}$ tel que $f(z) = c$. On en déduit aussitôt qu'il existe un voisinage ouvert V de a tel que f induise un homéomorphisme de V sur $\mathrm{W} = f(\mathrm{V})$ (par exemple $\mathrm{V} = f^{-1}(\mathrm{W})$ où W désigne la boule ouverte de centre b et de rayon $\varepsilon > 0$ assez petit). Quitte à rétrécir V, on peut supposer que f' ne s'y annule nulle part. Soit $g : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ l'inverse de f sur W. Montrons que g est holomorphe (on sait déjà que g est continue). Si $y \in \mathrm{W}$, et si on pose $x = g(y)$, on a

$$\lim_{w \to y} \frac{g(y) - g(w)}{b - w} = \lim_{z \to x} \frac{x - z}{f(x) - f(z)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

La fonction g est donc dérivable en y et $g'(y) f'(x) = 1$. □

Corollaire 7.1.2. *Soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *une fonction holomorphe. On suppose que l'intérieur de* $f(\mathrm{U})$ *est vide (autrement dit, que* $f(\mathrm{U})$ *n'est voisinage d'aucun de ses points dans* $\mathbf{C}$*). Alors* f *est une fonction localement constante.*

Remarque 7.1.3. Le lemme 4.2.1 et la proposition 4.2.2 sont des cas particuliers du corollaire précédent. Autrement dit, le principe du maximum (4.2.3) peut être prouvé à partir du théorème 7.1.1.

Corollaire 7.1.4. *Soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *une application à la fois holomorphe et injective sur un ouvert de* $\mathbf{C}$*. Si on pose* $\mathrm{V} = f(\mathrm{U})$*, alors* V *est un ouvert de* $\mathbf{C}$*, et l'application* f *induit une transformation holomorphe de* U *sur* V.

Démonstration. Le théorème 7.1.1 implique que V est ouvert et que f^{-1} est un homéomorphisme de V sur U. Pour montrer que f^{-1} est une transformation holomorphe, on peut supposer que V (et donc U) est connexe. En vertu du corollaire 4.1.5, on peut retirer de V une partie discrète à notre convenance. Comme f n'est pas constante sur U, la fonction f' n'est pas identiquement nulle sur U, et comme f' est holomorphe, en vertu du corollaire 4.1.6, le sous-ensemble $\mathrm{Z} \subset \mathrm{U}$ des zéros de f' n'a pas de points d'accumulation, de sorte que, en remplaçant U par $\mathrm{U} \smallsetminus \mathrm{Z}$ et V par $\mathrm{V} \smallsetminus f(\mathrm{Z})$, on peut supposer que f' ne s'annule pas sur U. La dernière assertion du théorème 7.1.1 achève alors la démonstration. □

Exercice 7.1.5. On considère deux constantes complexes a et b, un entier $n \geqslant 1$ une suite strictement croissante finie de n nombres réels non nuls

$$z_1 < z_2 < \cdots < z_n$$

ainsi qu'une famille finie de n éléments de l'intervalle $]0, 2[$

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n,$$

tels que

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \geqslant n - 2.$$

À une telle donnée est associée la *transformation de Schwarz-Christoffel*, c'est-à-dire la primitive F de la fonction f définie par

$$f(z) = a \prod_{i=0}^{n} (z - z_i)^{\alpha_i - 1},$$

telle que $\mathrm{F}(0) = b$. D'après la proposition 2.4.3, on peut par exemple décrire F par la formule

$$\mathrm{F}(z) = a \int_{\gamma_z} \left(\prod_{i=0}^{n} (u - z_i)^{\alpha_i - 1} \right) \mathrm{d}u + b,$$

où γ_z désigne n'importe quel chemin d'origine 0 et d'extrémité z. On rappelle que H désigne le demi-plan des $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbf{R}$, tels que $y > 0$. On note P le polygône (non nécessairement fermé) dont les sommets sont les points $\omega_i = \mathrm{F}(z_i)$, tel que l'angle intérieur en chaque point ω_i soit $\pi\alpha_i$.

1) Montrer que F induit une transformation holomorphe de H sur l'intérieur du polygône P.

2) Montrer que, dans le cas où P est un polygône fermé, alors on a nécessairement

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n - 2 .$$

2. Théorème fondamental de la représentation conforme

On rappelle qu'il n'existe pas de transformation holomorphe d'un disque ouvert D vers **C** (voir l'exemple 4.3.3).

THÉORÈME 7.2.1 (Riemann). *Un ouvert du plan complexe, distinct de* **C**, *est simplement connexe si et seulement s'il est isomorphe au disque ouvert* D, *de centre* 0 *et de rayon* 1.

La preuve de ce théorème se fera en plusieurs étapes (on reproduit ici la preuve donnée par Cartan [**Car61**], laquelle est une variation bourbachique de la preuve de Montel). Avant de rentrer dans cette démonstration, notons deux conséquences immédiates.

COROLLAIRE 7.2.2. *Si* U *et* V *sont deux ouverts simplement connexes de* **C**, *distincts de* **C**, *alors il existe au moins une transformation holomorphe de* U *sur* V.

DÉMONSTRATION. En vertu du théorème 7.2.1, on peut supposer que U = V = D est le disque unité ouvert, auquel cas l'identité de D fait l'affaire. □

COROLLAIRE 7.2.3. *Si* U *et* V *sont deux ouverts simplement connexes du plan complexe, alors il existe un homéomorphisme de* U *sur* V.

DÉMONSTRATION. Si U = V = **C**, alors c'est évident, et si U = V = D aussi. En vertu du théorème 7.2.1, il suffit de considérer le cas où U = D et où V = **C**, auquel cas l'assertion est bien connue. □

Venons en à la preuve du théorème 7.2.1.

LEMME 7.2.4. *Tout ouvert simplement connexe de* **C**, *distinct de* **C**, *est isomorphe à un voisinage ouvert de* 0 *dans* D.

DÉMONSTRATION. Soit U un ouvert simplement connexe de **C**. Supposons donné un point du plan complexe $a \notin \mathrm{U}$. On peut supposer que $a = 0$: sinon, on remplace U par le translaté $\mathrm{U} - a$. Comme U est simplement connexe, en vertu de l'assertion (i) du théorème 3.3.3, on peut alors choisir une détermination du logarithme

$$\log : \mathrm{U} \to \mathbf{C}.$$

Cette application est nécessairement injective, puisque section de l'exponentielle. Soit z_0 un point de U. Comme, en vertu de la proposition 7.1.4, log(U) est un voisinage ouvert de $\log(z_0)$, il existe un disque ouvert D, de centre $\log(z_0)$, contenu dans log(U). Aucun point du disque $\mathrm{D} + 2\pi i$ n'est dans l'image de log : si on a $\log(u) =$

$\log(v) + 2\pi i$, alors, en appliquant la fonction exponentielle, on obtient $u = v$, ce qui est absurde. La fonction

$$f(z) = \frac{1}{\log(z) - \log(z_0) - 2\pi i}$$

est donc injective et holomorphe sur U. Le corollaire 7.1.4 implique par conséquent que U et $f(\mathrm{U})$ sont isomorphes. Il est clair que $f(\mathrm{U})$ est borné. Il est par ailleurs clair qu'en appliquant une translation et une homothétie adéquate, $f(\mathrm{U})$ est isomorphe à un voisinage ouvert de 0 dans D. □

LEMME 7.2.5. *Si u et v sont deux nombres complexes de parties réelles non nulles et de même signe, alors $u + \bar{v} \neq 0$ et*

$$\left|\frac{u - v}{u + \bar{v}}\right| < 1\,.$$

DÉMONSTRATION. La différence $|u + \overline{v}|^2 - |u - v|^2$ est le quadruple du produit des parties réelles de u et de v, et donc, en particulier, est strictement positive. □

LEMME 7.2.6. *Soit α un nombre complexe de partie réelle non nulle. La fonction*

$$z \mapsto \frac{z - \alpha}{z + \bar{\alpha}}$$

est une transformation holomorphe de $\mathbf{C} \smallsetminus \{-\bar{\alpha}\}$ *sur* $\mathbf{C} \smallsetminus \{1\}$.

DÉMONSTRATION. On remarque que, comme la partie réelle de α n'est pas nulle, cette fonction ne prend jamais la valeur 1. On vérifie immédiatement que la fonction

$$z \mapsto \alpha \frac{z + 1}{z - 1}$$

définit la fonction inverse. □

LEMME 7.2.7. *Pout tout* $t \in]0, 1[$, *on a*

$$\frac{1 - t^2}{t} - 2\log\frac{1}{t} > 0\,.$$

DÉMONSTRATION. La fonction $f(t) = \frac{1-t^2}{t} - 2\log\frac{1}{t}$ pour dérivée $f'(t) = -\frac{(t-1)^2}{t^2}$. Il s'en suit que la fonction f' est stictement négative sur l'intervalle $]0, 1[$, et donc est strictement décroissante sur $]0, 1]$. On conclut en observant l'égalité $f(1) = 0$. □

LEMME 7.2.8. *Soit a et b deux nombres complexe tels que $e^a = b$. Alors la partie réelle de a est égale à* $\log|b|$. *En particulier,* $|b| < 1$ *si et seulement si la partie réelle de a est strictement négative.*

DÉMONSTRATION. On pose $a = x + iy$ avec $x, y \in \mathbf{R}$. Alors on a $b = e^a = e^x e^{iy}$, et donc $|b| = e^x$. Il s'en suit que $x = \log|b|$. □

7.2.9. Supposons que U vérifie $0 \in U \subset D$. On désigne par A l'ensemble des fonctions holomorphes $f : U \to \mathbf{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

(a) la fonction f est injective ;

(b) $f(0) = 0$;

(c) $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in U$.

LEMME 7.2.10. *Soit $f \in A$ une fonction telle que, pour tout $g \in A$, on ait*

$$|g'(0)| \leqslant |f'(0)|.$$

Alors $f(U) = D$.

DÉMONSTRATION. Soit $f \in A$, et supposons qu'il existe un point $a \in D$ tel que $a \notin f(U)$. Nous allons construire $g \in A$ tel que

$$|g'(0)| > |f'(0)|.$$

On considère l'homographie

$$h_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

En vertu du lemme 4.3.5, la fonction h_a est un automorphisme de D, et donc, comme f est injective et ouverte, le corollaire 7.1.4 nous permet d'affirmer que la fonction $h_a \circ f$ est un isomorphisme de U sur $V = h_a(f(U))$. En particulier, V est un ouvert simplement connexe de D, et il ne contient pas 0 (puisque $a \notin f(U)$ et $h_a(a) = 0$). Il existe donc une détermination du logarithme log sur V. On pose

$$F = \log \circ h_a \circ f.$$

Comme $h_a \circ f$ prend ses valeurs dans D, la fonction F prend ses valeurs dans l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement négative (lemme 7.2.8). On définit enfin

$$g(z) = \frac{F(z) - F(0)}{F(z) + \overline{F(0)}}.$$

Ce qui précède et les lemmes 7.2.5 et 7.2.6 impliquent que g est une fonction holomorphe injective sur U qui prend ses valeurs dans D. De plus, il est trivial que $g(0) = 0$, de sorte que $g \in A$. Puis on fait quelques menus calculs élémentaires. On a

$$F'(z) = \frac{(h_a \circ f)'(z)}{h_a(f(z))} = \frac{h_a'(f(z))f'(z)}{h_a(f(z))},$$

et, par conséquent, vu que $f(0) = 0$, on obtient

$$F'(0) = -\frac{h_a'(0)}{a} f'(0).$$

On observe ensuite que

$$h_a'(z) = \frac{1 - \bar{a}z + \bar{a}(z-a)}{(1-\bar{a}z)^2},$$

et donc que

$$\mathrm{F}'(0) = \Big(\bar{a} - \frac{1}{a}\Big) f'(0).$$

Puisque nous sommes sur cette lancée, on voit que

$$g'(z) = \frac{\mathrm{F}'(z)(\mathrm{F}(z) + \overline{\mathrm{F}(0)}) - \mathrm{F}'(z)(\mathrm{F}(z) - \mathrm{F}(0))}{(\mathrm{F}(z) + \overline{\mathrm{F}(0)})^2},$$

d'où, en vertu du lemme 7.2.8, et sachant que $\mathrm{F}(0) = \log(-a)$,

$$g'(0) = \frac{\mathrm{F}'(0)}{2\log|a|}.$$

En conclusion, on a :

$$\frac{g'(0)}{f'(0)} = \Big(\bar{a} - \frac{1}{a}\Big)\frac{1}{2\log|a|} = \frac{1 - a\bar{a}}{-2a\log|a|} = \frac{1 - a\bar{a}}{2a\log\frac{1}{|a|}}.$$

On obtient en particulier l'identification

$$\frac{|g'(0)|}{|f'(0)|} = \frac{1 - |a|^2}{2|a|\log\frac{1}{|a|}}.$$

Le lemme 7.2.7 implique pour finir que $|g'(0)| > |f'(0)|$. □

Lemme 7.2.11. *Le sous-espace*

$$\mathrm{B} = \{f \in \mathrm{A} \mid |f'(0)| \geqslant 1\}$$

est compact et non vide dans $\mathscr{H}(\mathrm{U})$.

Démonstration. Il est clair que l'inclusion $\mathrm{U} \subset \mathrm{D}$ définit un élément de B, de sorte que B n'est pas vide.

Montrons que B est un fermé de $\mathscr{H}(\mathrm{U})$. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de B, et supposons que cette suite converge vers f dans $\mathscr{H}(\mathrm{U})$. Il résulte du théorème 6.1.5 et du lemme 6.3.8 que $|f'(0)| \geqslant 1$. En particulier, f n'est pas constante. Le corollaire 5.2.11 montre donc que f est injective. Le lemme 6.3.8 implique que $f(0) = 0$ et que $|f(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathrm{U}$. Montrons que l'égalité $|f(z)| = 1$ est impossible. Soit $a \in \mathrm{U}$ tel que $|f(a)| = 1$. En appliquant le principe du maximum à la fonction f restreinte à un disque ouvert de centre a assez petit, on en déduit que f est constante au voisinage de a, ce qui contredit le fait que f est injective. En vertu du théorème de Montel (6.4.2), le fermé borné B est donc un sous-espace compact de $\mathscr{H}(\mathrm{U})$. □

preuve du théorème 7.2.1. Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}$, distinct de $\mathbf{C}$, et soit D le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. Pour montrer que U et D sont isomorphes, on peut supposer, en vertu du lemme 7.2.4, que

$$0 \in \mathrm{U} \subset \mathrm{D}.$$

Soit A le sous-ensemble de $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ défini au numéro 7.2.9, et soit $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ le sous-ensemble introduit dans l'énoncé du lemme 7.2.11. Il résulte du théorème 6.1.5 et du lemme 6.3.8 que l'application

$$\mathrm{B} \to \mathbf{R}, \quad f \mapsto |f'(0)|$$

est continue. Comme B est compact et non vide (7.2.11), celle-ci est donc bornée et atteint ses bornes. On choisit $f \in \mathrm{B}$ réalisant la borne supérieure. Il est immédiat que f vérifie les hypothèses du lemme 7.2.10, de sorte que $f(\mathrm{U}) = \mathrm{D}$. Le corollaire 7.1.4 implique donc que f est un isomorphisme de U sur D. □

3. Rotations

Dans toute cette section, U désigne un ouvert borné et connexe de $\mathbf{C}$, et $a \in \mathrm{U}$ est un point fixé.

Définition 7.3.1. Une *rotation de* U *de centre a* est une fonction holomorphe $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $f(a) = a$;
(ii) $|f'(a)| = 1$;
(iii) $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{U}$.

On note $\mathscr{R}_a(\mathrm{U}) \subset \mathscr{H}(\mathrm{U})$ le sous-espace des rotations de U de centre a.

Proposition 7.3.2. *L'espace $\mathscr{R}_a(\mathrm{U})$ des rotations de* U *de centre a est compact.*

Démonstration. La condition (iii) de la définition 7.3.1 implique aussitôt que $\mathscr{R}_a(\mathrm{U})$ est une partie bornée de $\mathscr{H}(\mathrm{U})$. En vertu du théorème de Montel (6.4.2), il suffit donc de prouver que $\mathscr{R}_a(\mathrm{U})$ est fermé dans $\mathscr{H}(\mathrm{U})$. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de rotations de U de centre a qui converge dans $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ vers une fonction holomorphe f. Comme l'évaluation en a est une fonction continue sur $\mathscr{H}(\mathrm{U})$, tout comme l'est la dérivation $f \mapsto f'$ (d'après le théorème 6.1.5), il est clair que f vérifie les conditions (i) et (ii) de la définition 7.3.1. Il reste donc à prouver que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{U}$. Si $\bar{\mathrm{U}}$ désigne l'adhérence de U dans $\mathbf{C}$, il est clair que $f(\mathrm{U}) \subset \bar{\mathrm{U}}$. Or, comme $f'(a) \neq 0$, la fonction f n'est pas constante sur U (lequel est supposé connexe), et donc, f est une application ouverte (7.1.1). Comme l'intérieur de $\bar{\mathrm{U}} \setminus \mathrm{U}$ est vide, cela implique que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{U}$. □

7.3.3. On vérifie immédiatement que, pour toutes fonctions holomorphes $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ et $g : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ telles que $f(a) = g(a) = a$, on a $(f \circ g)'(a) = f'(a)g'(a)$. Il en résulte aussitôt que, pour $f, g \in \mathscr{R}_a(\mathrm{U})$, la fonction composée $f \circ g$ est encore une rotation de U de centre a.

Pour $n \geqslant 0$ un entier et $f \in \mathscr{R}_a(\mathrm{U})$, on notera

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

PROPOSITION 7.3.4. *Soit f une rotation de* U *de centre a. Pour que f soit l'identité de* U, *il faut et il suffit que $f'(a) = 1$.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que c'est une condition nécessaire. Soit $f \in \mathscr{R}_a(\mathrm{U})$ telle que $f'(a) = 1$. Pour prouver la réciproque, on peut supposer que $a = 0$ (ce qui ne servira qu'à alléger les notations). Le développement de Taylor de f au point 0 est alors de la forme

$$f(z) = z + cz^m + z^{m+1}(\cdots)$$

avec $c \in \mathbf{C}$, $m \geqslant 2$ un entier, et $(\cdots)$ une fonction holomorphe au voisinage de zéro. On en déduit que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$f(z)^k = z^k + z^{k+1}(\cdots).$$

Il en résulte, par une récurrence évidente sur n, que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, le développement de Taylor de la composée itérée f^n est de la forme

$$f^n(z) = z + ncz^m + z^{m+1}(\cdots).$$

Autrement dit, la m-ème dérivée de f^n en 0 est de la forme

$$(f^n)^{(m)}(0) = m!nc.$$

Or il résulte de la proposition 7.3.2 que la suite $(f^n)_{n\geqslant 0}$ admet une sous-suite convergente dans l'espace $\mathscr{H}(\mathrm{U})$. En vertu du théorème 6.1.5, cela implique que la suite numérique $(m!nc)_{n\geqslant 0}$ admet une sous-suite convergente. Pour cela, il faut que $c = 0$. En conclusion on a donc $f(z) = z$ pour z proche de zéro. Vu que l'ouvert U est supposé connexe, le principe du prolongement analytique implique que $f(z) = z$ pour tout $z \in \mathrm{U}$. □

LEMME 7.3.5. *Soit ϑ un nombre réel irrationnel. L'ensemble*

$$\{e^{n\pi i\vartheta},\ n \in \mathbf{N}^*\}$$

est dense dans le cercle d'équation $|z| = 1$.

DÉMONSTRATION. Soit E l'ensemble des nombres réels de la forme $x = p\pi\vartheta + 2q\pi$, avec $p, q \in \mathbf{Z}$. Il est clair que E est un sous-groupe du groupe additif $\mathbf{R}$. On note E^+ le sous-ensemble des éléments de E qui sont strictement plus grand que zéro, et on pose $e = \min \mathrm{E}^+$. Montrons que e n'est pas dans $\mathrm{E} \setminus \{0\}$. Si c'était le cas, E serait un groupe cyclique de générateur e. En effet, pour tout $x \in \mathrm{E}$, comme $\mathbf{R}$ est archimédien, on peut trouver un entier n donnant lieu aux inégalités $ne \leqslant x < (n+1)e$. On a alors $x - ne \in \mathrm{E}$ et $0 \leqslant x - ne < e$, ce qui impose l'égalité $x - ne = 0$, par définition de e. Mais alors il existe des entiers p et q tels que $2\pi\vartheta = pe$ et $2\pi = qe$, d'où il ressort que $\vartheta = \frac{p}{q}$ est un nombre rationnel, ce qui est absurde. Par conséquent, il existe une suite strictement décroissante $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de E^+ qui converge vers e. La suite $(x_n - x_{n+1})_{n\geqslant 0}$ est alors une suite d'éléments de E^+ qui converge vers 0, ce qui impose que $e = 0$. En conclusion, nous savons à présent que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $0 < x < \varepsilon$.

Notons E' le sous-ensemble des éléments de E^+ de la forme $x = p\pi\vartheta + 2q\pi$ avec $p > 0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E'$ tel que $0 < x < \varepsilon$. En effet, si on a $x = p\pi\vartheta + 2q\pi$ avec p et q des entiers tels que $0 < x < \varepsilon$ et $p \leqslant 0$, alors il existe une infinité d'éléments y de E^+ tels que $0 < y < x$. Si l'un de ces éléments y est dans E', cela montre la propriété voulue. Sinon, l'un de ces éléments y doit être de la forme $y = a\pi\vartheta + 2b\pi$ avec a et b des entiers tels que $a < p$, car, pour a fixé il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $E \cap]0, x[$ de la forme $a\pi\vartheta + 2b\pi$, $b \in \mathbf{Z}$. On a alors $0 < x - y < x < \varepsilon$ et $p - a > 0$.

Soit a un nombre réel positif et $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède, on peut trouver $x \in E'$ tel que $0 < x < \varepsilon$. Comme $\mathbf{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $nx > a$. Si n est minimal pour cette propriété, alors on a $a < nx < a + \varepsilon$ (puisque si $a + \varepsilon \leqslant nx$, alors $a + x < nx$, d'où $a < (n-1)x$, ce qui contredit la minimalité de n). Comme l'application $a \mapsto e^{ia}$ est continue et surjective de $\mathbf{R}_+$ sur le cercle unité, cela achève la démonstration. $\square$

Lemme 7.3.6. *Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 1$. La suite géométrique $(z^n)_{n\geqslant 0}$ admet une sous-suite qui converge vers 1.*

Démonstration. On a deux possibilités : ou bien z est une racine m-ème de l'unité pour $m \in \mathbf{N}^*$, et alors la sous-suite $(z^{nm})_{n\geqslant 0}$ fait l'affaire, ou bien $z = e^{i\pi\vartheta}$ avec ϑ un nombre réel irrationnel, et on conclut avec le lemme 7.3.5. $\square$

Proposition 7.3.7. *Soit f une rotation de U de centre a. Alors f induit une bijection de U sur lui-même. De plus l'application inverse $f^{-1} : U \to U$ est aussi une rotation de U de centre a.*

Démonstration. On considère de nouveau la suite de rotations $(f^n)_{n\geqslant 0}$. On déduit de la formule $(f^n)'(a) = f'(a)^n$, de la proposition 7.3.2 et du lemme 7.3.6 qu'on peut trouver une sous-suite $(f^{n_k})_{k\geqslant 0}$ qui converge dans $\mathscr{H}(U)$, et telle que la suite numérique $(f'(a)^{n_k})_{k\geqslant 0}$ converge vers 1. Posons

$$g = \lim_{k\to+\infty} f^{n_k}.$$

Comme $\mathscr{R}_a(U)$ est en particulier fermé dans $\mathscr{H}(U)$, la fonction g est une rotation de U de centre a. De plus, il résulte du théorème 6.1.5 que

$$g'(a) = \lim_{k\to+\infty} (f^{n_k})'(a) = \lim_{k\to+\infty} f'(a)^{n_k} = 1.$$

Par conséquent, la proposition 7.3.4 implique que $g(z) = z$ pour tout $z \in \mathrm{U}$.

Montrons que f est injective. Soient $a, b \in \mathrm{U}$ tels que $f(a) = f(b)$. Alors, pour tout entier $m \geqslant 1$, on a $f^m(a) = f^m(b)$. En particulier, on a donc

$$a = g(a) = \lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(a) = \lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(b) = g(b) = b\,.$$

Montrons que f est surjective. Soit $b \in \mathrm{U}$. Considérons un nombre réel $r > 0$ tel que le disque fermé de centre b et de rayon r soit contenu dans U. Pour k assez grand on a

$$|f^{n_k}(z) - z| < r$$

pour tout $z \in \mathrm{U}$ tel que $|b - z| = r$. Le théorème de Rouché appliqué aux fonctions $f^{n_k} - b$ et $g - b$ implique qu'il existe un unique $u \in \mathrm{U}$ tel que $|b - u| < r$ et $f^{n_k}(u) = b$. On peut supposer $n_k > 1$. On pose, dans ce cas, $z = f^{n_k - 1}(u)$. On a alors $f(z) = b$.

Le théorème 7.1.1 implique que la fonction inverse $f^{-1} : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ est holomorphe. De plus, comme $f(a) = a$, on a la formule

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(a)}\,,$$

d'où on déduit aussitôt que f^{-1} est une rotation de U de centre a. □

Corollaire 7.3.8. *Les rotations de* U *de centre a forment un groupe avec pour multiplication celle induite de la composition des fonctions holomorphes.*

On pose

$$\mathbf{U} = \left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\},$$

vu comme un groupe avec la multiplication usuelle des nombres complexes.

Proposition 7.3.9. *L'application*

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_a(\mathrm{U}) &\to \mathbf{U} \\ f &\mapsto f'(a) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes injectif et une application continue. Elle induit un homéomorphisme de $\mathscr{R}_a(\mathrm{U})$ *sur son image, laquelle est donc un sous-groupe fermé de* $\mathbf{U}$.

Démonstration. Il est clair que c'est un morphisme de groupes (cf. 7.3.3). L'injectivité de ce morphisme est une reformulation immédiate de la proposition 7.3.4. La continuité résulte quant à elle du théorème 6.1.5. Notons $\mathrm{R}_a(\mathrm{U})$ l'image de $\mathscr{R}_a(\mathrm{U})$ par ce morphisme, muni de la topologie induite de celle de $\mathbf{U}$. Alors $\mathrm{R}_a(\mathrm{U})$ est compact (puisqu'image d'un compact par une fonction continue, d'après la proposition 7.3.2). L'application $f \mapsto f'(a)$ est donc une bijection continue entre espaces topologiques compacts, ce qui implique que c'est un homéomorphisme de $\mathscr{R}_a(\mathrm{U})$ sur $\mathrm{R}_a(\mathrm{U})$. □

LEMME 7.3.10. *Soit* X *un espace topologique. On suppose donnée une suite* $(\mathrm{Z}_n)_{n\geqslant 0}$ *de fermés de* X *ainsi qu'un fermé* $\mathrm{T} \subset \mathrm{X}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(a) T *est compact ;*

(b) $\mathrm{Z}_n \subset \mathrm{Z}_{n+1}$ *pour tout* $n \geqslant 0$ *;*

(c) $\mathrm{T} \subset \bigcup_{n\geqslant 0} \mathrm{Z}_n$.

Alors T *est contenu dans* Z_n *pour n assez grand.*

DÉMONSTRATION. On procède par l'absurde. Si ce n'est pas le cas, quitte à remplacer $(\mathrm{Z}_n)_{n\geqslant 0}$ par une sous-suite, la condition (b) implique que, pour tout $n \geqslant 0$, on peut trouver $x_n \in \mathrm{T} \cap (\mathrm{Z}_{n+1} \smallsetminus \mathrm{Z}_n)$. Vu que T est compact, quitte à remplacer de nouveau $(\mathrm{Z}_n)_{n\geqslant 0}$ par une sous-suite, on peut supposer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un élément x de T. Par construction, la famille $(\mathrm{T} \smallsetminus (\mathrm{T} \cap \mathrm{Z}_n))_{n\geqslant 0}$ forme une suite décroissante de voisinages ouverts de x. Il en résulte que x n'appartient pas à la réunion des fermés Z_n, ce qui contredit la condition (c). □

PROPOSITION 7.3.11. *Soit* R *un sous-groupe fermé de* **U**. *Si* $\mathrm{R} \neq \mathbf{U}$, *alors il existe un entier* $n \geqslant 1$ *tel que* R *soit le groupe* $\mu_n = \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\}$ *des racines n-èmes de l'unité.*

DÉMONSTRATION. Si tous les éléments de R sont d'ordre fini, on a alors

$$\mathrm{R} \subset \bigcup_{n\geqslant 0} \mu_n\,;$$

en vertu du lemme 7.3.10 (appliqué à la suite de fermés $\mathrm{Z}_n = \mu_{n!}$ avec $\mathrm{T} = \mathrm{R}$), on a donc $\mathrm{R} \subset \mu_{m!}$ pour m assez grand. En particulier, R est un groupe cyclique fini (puisque sous-groupe d'un tel groupe), et, si n désigne l'ordre de R, tout générateur de R est nécessairement une racine primitive n-ème de l'unité, d'où $\mathrm{R} = \mu_n$. S'il existe un élément d'ordre infini dans R, il est de la forme $z = e^{\pi i \vartheta}$ avec ϑ un nombre réel nécessairement irrationnel. Dans ce cas, d'après le lemme 7.3.5, la famille des puissances de z est partout dense dans **U**. Autrement dit R est un fermé qui contient une partie dense de **U**, et on doit donc avoir $\mathrm{R} = \mathbf{U}$. □

PROPOSITION 7.3.12. *Soit* $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *une transformation holomorphe. Posons* $b = \varphi(a)$. *Alors l'application*

$$f \mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

induit un isomorphisme de groupes topologiques

$$\mathscr{R}_a(\mathrm{U}) \simeq \mathscr{R}_b(\mathrm{V})\,.$$

Démonstration. En effet, pour $f \in \mathscr{R}_a(\mathrm{U})$, on a la formule

$$(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})'(b) = \varphi'(a) f'(a) \varphi'(a)^{-1} = f'(a),$$

d'où on déduit que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une rotation de V de centre b. □

Théorème 7.3.13. *Si* U *est simplement connexe, alors l'application* $f \mapsto f'(a)$ *induit un isomorphisme de groupes topologiques*

$$\mathscr{R}_a(\mathrm{U}) \simeq \mathbf{U}.$$

Démonstration. En vertu du théorème de Riemann (7.2.1) et de la proposition précédente, on peut supposer que U est le disque D, de centre 0 et de rayon 1. De plus, on peut supposer que $a = 0$: sinon, on utilise l'homographie

$$z \mapsto \frac{z-a}{1-z\bar{a}},$$

laquelle est un automorphisme de D qui envoie a sur 0. Dans ce cas, pour tout $\lambda \in \mathbf{U}$, l'application $z \mapsto \lambda z$ est une rotation de D de centre 0 dont la dérivée est λ. On conclut donc immédiatement avec la proposition 7.3.9. □

7.3.14. Soit D le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. On choisit $r \in]0,1[$, ainsi qu'un entier $n \geqslant 1$. On pose

$$\mathrm{Z} = \left\{ z \in \mathbf{C} \;\middle|\; zr^{-1} \in \mu_n \right\}$$

Il est clair que $\mathrm{U} = \mathrm{D} \smallsetminus \mathrm{Z}$ est un ouvert de D contenant 0.

Proposition 7.3.15. *Sous les hypothèses du numéro* 7.3.14, *l'application* $f \mapsto f'(0)$ *définit un isomorphisme de groupes*

$$\mathscr{R}_0(\mathrm{U}) \simeq \mu_n.$$

Démonstration. Pour $\lambda \in \mu_n$, l'homothétie de rapport λ définit une rotation de D de centre 0 qui envoie U dans lui même. On en déduit que μ_n est contenu dans l'image de l'application $f \mapsto f'(0)$. Soit $f \in \mathscr{R}_0(\mathrm{U})$, et posons $\lambda = f'(0)$. Pour terminer la démonstration, il reste à prouver que $\lambda \in \mu_n$. Comme μ_n est fini et f bornée sur U, il résulte de la proposition 5.1.13 que f se prolonge en une fonction holomorphe φ sur D tout entier. Il est clair que $\varphi(0) = f(0) = 0$ et que $\varphi'(0) = f'(0) = \lambda$. De plus, le principe du maximum nous assure que $\varphi(\mathrm{D}) \subset \mathrm{D}$, puisque $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{D}$. Autrement dit, $\varphi \in \mathscr{R}_0(\mathrm{D})$. Cela implique que $\varphi(z) = \lambda z$ pour tout $z \in \mathrm{D}$. Le fait que f soit une rotation de U de centre 0 ce traduit par le fait que φ envoie $r\mu_n$ dans $r\mu_n$. Il existe donc deux éléments a et b de μ_n tels que $\lambda r a = r b$. Cela implique que $\lambda = ba^{-1}$ est un élément de μ_n. □

Bibliographie

[Car61] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1961.

[Car67] ———, *Formes différentielles*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1967.

[Col11] P. Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*, Les Éditions de l'École Polytechnique, 2011.

[Die80] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1980, deuxième édition, revue et augmentée.

[Gos93a] B. Gostiaux, *Cours de mathématiques spéciales. Tome 1 : Algèbre*, Presses Universitaires de France, Paris, 1993, avec une préface par Paul Deheuvels.

[Gos93b] ———, *Cours de mathématiques spéciales. Tome 2 : Topologie, analyse réelle*, Presses Universitaires de France, Paris, 1993.

[Gos93c] ———, *Cours de mathématiques spéciales. Tome 3 : Analyse fonctionnelle et calcul différentiel*, Presses Universitaires de France, Paris, 1993.

[Rud98] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, Paris, 1998, traduction de *Real and complex Analysis. Third Edition*. McGraw Hill, 1987.