Examen corrigé – 3 Mars 2016

Exercice 1. Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $d \geq 2$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_d)$, on note $E_x = \mathbf{R}x_1 + \cdots + \mathbf{R}x_d \subset E$. Enfin, pour $1 \leq k \leq d$, on pose

$$X_k = \{x \in E^k \,|\, \dim E_x = k\}\,.$$

a) Toute sous-famille d'une famille libre étant libre, la projection sur les k premières composantes $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$ définit une application $p_k : X_{k+1} \to X_k$. Les matrices inversibles d'ordre d correspondent bijectivement aux familles libres formées de d vecteurs (où on interprète ces dernièrs comme des vecteurs colonnes de matrices). Tout choix d'une base de E détermine donc un homéomorphisme de $GL_d(\mathbf{C})$ sur X_d. D'autre part, on peut voir les éléments de X_k comme l'ensemble des familles libres formées de k-vecteurs. Le théorème de la base incomplète implique donc que

$$X_k = \{x \in E^k \,|\, \exists y \in X_{d-k}\,,\ x \oplus y \in X_d\}\,.$$

b) Soit $y = (y_1, \ldots, y_{d-k}) \in X_{d-k}$. Posons

$$U = \{x \in X_k \,|\, x \oplus y \in X_d\}\,.$$

On déduit facilement de la question a) que U est un ouvert de E^k, et donc aussi de X_k (ce dernier étant muni de la topologie induite de celle de E^k). Alors $V = p_k^{-1}(U)$ s'identifie canoniquement (via un homéomorphisme) à l'espace $U \times \mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^{d-k} - \{0\})$, de sorte que la restriction de p_k à V corresponde à la première projection : un élément de V correspond à une famille libre ordonnée $x = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ dans E, et x_{k+1} s'écrit de façon unique sous la forme

$$x_{k+1} = \sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i x_i + \sum_{1 \leq j \leq d-k} \mu_j y_j\,,$$

avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbf{C}^k$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_{d-k}) \in \mathbf{C}^{d-k} - \{0\}$ (car la famille $\{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{d-k}\}$ forme une base de E, par définition de V). Autrement dit, la restriction de p_k à V définit un fibré trivial de base U. Lorsque y parcourt tous les éléments de X_{d-k}, les ouverts U comme ci-dessus forment un recouvrement de X_k (d'après la question b)). On a donc prouvé que l'application p_k est un fibré de base X_k et de fibre $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^{d-k} - \{0\})$ (que l'on peut voir comme le complémentaire de $\mathbf{C}^k$ dans $\mathbf{C}^d$). En particulier, l'application p_k est donc une fibration de Serre.

c) Les inclusions

$$S^{2(d-k)-1} \subset \mathbf{C}^{d-k} - \{0\} \simeq \{0\} \times (\mathbf{C}^{d-k} - \{0\}) \subset \mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^{d-k} - \{0\})$$

sont des équivalences d'homotopie : on le voit aussitôt en considérant les fonctions

$$h(t,x) = \exp(t \log ||x||) \frac{x}{||x||} \quad \text{et} \quad k(t,u,v) = (tu, v)\,.$$

Les fibres de la fibration de Serre p_k ont donc toutes le type d'homotopie de la sphère $S^{2(d-k)-1}$.

d) On rappelle que, pour une sphère S^n, on a $\pi_i(S^n) = 0$ pour $i < n$, et $\pi_n(S^n) \simeq \mathbf{Z}$. Pour $n = 1$, la longue suite exacte de Serre associée à la projection canonique $\mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z} \simeq S^1$

montre que $\pi_i(S^1) = 0$ pour $i \neq 1$. La question précédente permet de voir que la longue suite exacte de Serre de la fibration p_k en bas degrés prend la forme

$$\pi_i(X_{k+1}) \simeq \pi_i(X_k)$$

si $i < 2(d-k)-1$. D'autre part, $X_1 = E - \{0\}$ a le type d'homotopie de la sphère S^{2d-1}. En particulier, on a donc $\pi_i(X_1) = 0$ si $i < 2d-1$. Il s'en suit que les espaces X_k sont tous connexes (par arcs). On a mieux : $\pi_i(X_1) = 0$ pour $i \leq 2$. On en déduit immédiatement que $\pi_i(X_k) \simeq \pi_1(X_1) = 0$ pour $1 \leq k < d$ et $i \leq 2$. Lorsque $k = d-1$, on a $S^1 = S^{2(d-k)-1}$, et donc la suite exacte

$$0 = \pi_2(S^1) \to \pi_2(X_d) \to \pi_2(X_{d-1}) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(X_d) \to \pi_1(X_{d-1})$$

implique que

$$\pi_2(X_d) \simeq \pi_2(X_{d-1}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{Z} \simeq \pi_1(S^1) \simeq \pi_1(X_d)\,.$$

e) On a une suite exacte de groupes de Lie

$$1 \to SL_d(\mathbf{C}) \to GL_d(\mathbf{C}) \xrightarrow{\det} \mathbf{C}^* \to 1$$

Autrement dit, le déterminant s'identifie à la projection canonique

$$GL_d(\mathbf{C}) \to GL_d(\mathbf{C})/SL_d(\mathbf{C})\,.$$

Il s'en suit que l'application déterminant est une fibration de Serre, laquelle donne lieu à une longue suite exacte. On a donc, en particulier, une suite exacte de la forme ci-dessous (dans laquelle le premier mophisme est celui induit par le déterminant par fonctorialité).

$$\pi_1(GL_d(\mathbf{C})) \to \pi_1(\mathbf{C}^*) \to \pi_0(SL_d(\mathbf{C}))$$

Le groupe spécial linéaire étant connexe, et vu que les groupes $\pi_1(X_d) = \pi_1(GL_d(\mathbf{C}))$ et $\pi_1(\mathbf{C}^*)$ sont tous deux cycliques et infinis (d'après a) et d)), le morphisme induit par le déterminant

$$\mathbf{Z} \simeq \pi_1(GL_d(\mathbf{C})) \to \pi_1(\mathbf{C}^*) \simeq \mathbf{Z}$$

doit être inversible (car tout morphisme de groupes surjectif de la forme $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ doit être l'identité). La longue suite exacte de Serre en degrés 1 est donc de la forme

$$0 = \pi_2(\mathbf{C}^*) \to \pi_1(SL_d(\mathbf{C})) \xrightarrow{0} \pi_1(GL_d(\mathbf{C})) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbf{C}^*)$$

et donc $\pi_1(SL_d(\mathbf{C})) = 0$. En degré 2, on a

$$0 = \pi_3(\mathbf{C}^*) \to \pi_2(SL_d(\mathbf{C})) \to \pi_2(GL_d(\mathbf{C})) \to \pi_2(\mathbf{C}^*) = 0$$

et donc $\pi_2(SL_d(\mathbf{C})) \simeq \pi_2(X_d) = 0$.

Exercice 2. Soit G un groupe fini, et k un anneau dans lequel l'ordre de G soit inversible (i.e. la caractérisitque de k est première à l'ordre de G).
a) Soit M une représentation k-linéaire de G à droite. On définit une application k-linéaire $p : M \to M$ en posant

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} x.g\,.$$

Il est clair que $\pi \circ \pi = \pi$, et que

$$M^G = \{x \in M \mid \forall g \in G\,,\ x.g = x\}$$

est l'image de p. Cela montre que M^G est un facteur direct de M.
Considérons une suite exacte courte de représentations k-linéaires de G de la forme ci-dessous (tous les morphismes sont k-linéaires et équivariants).

$$0 \to K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} Q \to 0$$

Alors, par fonctorialité, on a un diagramme de la forme suivante.

$$0 \to K^G \to M^G \to Q^G \to 0$$

Ce dernier est une suite exacte courte : l'injectivité de i implique que si $x \in M^G$ est de la forme $x = i(z)$ pour $z \in K$, on a nécessairement $z \in K^G$; on en déduit aussitôt que c'est une suite exacte à gauche. Il suffit donc de montrer que le morphisme $M^G \to Q^G$ est surjectif : si $y \in Q^G$, on peut trouver $x_0 \in M$ tel que $y = p(x_0)$. Si on pose $x = \pi(x_0)$, alors on a aussi $p(x) = y$ et $x \in M^G$.
c) Soit C un complexe de représentations k-linéaires de G. Alors C^G est un sous-complexe de C, et l'inclusion $C^G \subset C$ induit par fonctorialité un morphisme de la forme

$$H^i(C^G) \to H^i(C)$$

pour tout entier i. D'autre part, l'action de G sur C induit par fonctorialité une action de G sur $H^i(C)$, et l'image de $H^i(C^G)$ est naturellement contenue dans $H^i(C)^G$. On a donc un morphisme canonique de la forme

$$H^i(C^G) \to H^i(C)^G \, .$$

Ce dernier est bijectif. Cela résulte du fait que, pour tout morphisme $M \to N$ de représentations k-linéaires de G, on a des bijections canoniques de la forme ci-dessous.

$$\ker(M \to N)^G \simeq \ker(M^G \to N^G) \tag{1}$$

$$\mathrm{Im}(M \to N)^G \simeq \mathrm{Im}(M^G \to N^G) \tag{2}$$

$$\mathrm{coker}(M \to N)^G \simeq \mathrm{coker}(M^G \to N^G) \tag{3}$$

Le premier isomorphisme est essentiellement évident (c'est même une égalité). Pour le second, cela résulte aussitôt du premier et de l'application de b) à la suite exacte courte

$$0 \to \ker(M \to N) \to M \to \mathrm{Im}(M \to N) \to 0 \, .$$

Enfin, pour le troisième, on considère la suite exacte courte canonique

$$0 \to \mathrm{Im}(M \to N) \to N \to \mathrm{coker}(M \to N) \to 0$$

et on applique b) de nouveau, que l'on interprète suivant l'identification (2) ci-dessus.
d) Supposons que G agisse librement à gauche sur une variété différentielle M. Comme G est fini, cette acion est aussi propre, et donc l'espace quotient $M_{/G}$ est une variété différentielle, et l'application canonique $M \to M_{/G}$ est différentiable. D'autre part, pour toute variété différentielle X, on a une action à droite de G sur l'espace des fonctions continues (resp. de classe C^∞) de M vers X : si f est une telle fonction, et si $g \in G$, la fonction $f.g$ est définie par :

$$f.g(x) = f(g.x) \, .$$

On a alors une bijection canonique :

$$\mathcal{C}^\infty(M, X)^G \simeq \mathcal{C}^\infty(M_{/G}, X) \, .$$

En effet, l'analogue est vrai avec les fonctions continues (essentiellement par définition de l'espace quotient $M_{/G}$), et on en déduit la version C^∞ en utilisant le fait que la projection canonique $p : M \to M_{/G}$ est un revêtement surjectif (et donc, en particulier, un difféomorphisme local surjectif, ce qui implique qu'une application $f : M_{/G} \to X$ est différentiable si et seulement si fp l'est). Lorsque $X = \Lambda^i(\mathbf{R}^d)$ et $M_{/G}$ est difféomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^d$, et lorsque $M \simeq G \times M_{/G}$, cela prouve que, pour tout i, les i-formes différentielles sur $M_{/G}$ s'identifient aux i-formes différentielles invariantes sous-l'action de G :

$$\Omega^i(M)^G \simeq \Omega^i(M_{/G})\,.$$

On en déduit que cette identification canonique reste vraie globalement sur M en recouvrant $M_{/G}$ par des ouverts U difféomorphes à des ouverts de $\mathbf{R}^d$, de sorte que les ouverts $V = p^{-1}(U)$ soient difféomorphes à $G \times U$ au-dessus de U, et recouvrent M.

e) Le groupe $\mu_2 = \{\pm 1\}$ agit librement sur la sphère S^n, de sorte que le quotient ne soit autre que l'espace projectif réel $\mathbf{R}\mathrm{P}^n$. La conjonction de c) et de d) nous donne donc, pour tout entier i, un isomorphisme canonique

$$H^i_{dR}(\mathbf{R}\mathrm{P}^n) \simeq H^i_{dR}(S^n)^{\mu_2}\,.$$

Or on sait que, pour $n > 0$, on a

$$\dim H^i_{dR}(S^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \text{ ou si } i = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour calculer la cohomologie de l'espace projectif réel, il faut donc comprendre l'action de μ_2 sur $H^n_{dR}(S^n)$. Soit i la restriction à S^n de la multiplication par -1 dans $\mathbf{R}^{n+1}$. Pour toute n-forme différentielle ω sur S^n, on a : $i^*(\omega) = (-1)^{n+1}\omega$. Il suffit en effet de le vérifier localement. Or, si U est un ouvert de S^n assez petit, il résulte du théorème des fonctions implicites que la restriction de ω à U est la restriction à U d'une forme différentielle η définie sur un ouvert V de $\mathbf{R}^{n+1}$ dont la trace sur S^n est U. On en déduit par la formule du jacobien que

$$i^*(\omega)_{|_{i^{-1}(U)}} = i^*(\omega_{|_U}) = (-1)^{n+1}\omega_{|_{i^{-1}(U)}}\,.$$

Il s'en suit donc que

$$\dim H^i_{dR}(\mathbf{R}\mathrm{P}^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \text{ ou si } i = n \text{ est impair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3. Soit M une variété différentielle.

a) Si M est un ensemble fini, alors on a

$$H^i_{dR}(M) = \begin{cases} \mathbf{R}^M & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il s'en suit que $\chi(M) = \dim \mathbf{R}^M = \mathrm{Card}(M)$.

b) Supposons que M soit la réunion de deux ouverts U et V, avec U, V et $U \cap V$ de type fini. On a alors la longue suite exacte de Mayer-Vietoris.

$$\cdots \to H^{i-1}_{dR}(U \cap V) \to H^i_{dR}(M) \to H^i_{dR}(U) \oplus H^i_{dR}(V) \to H^i_{dR}(U \cap V) \to H^{i+1}_{dR}(M) \to \cdots$$

On a donc des suites exactes courtes de la forme

$$0 \to Q_{i-1} \to H^i_{dR}(M) \to K_i \to 0$$

avec Q_i (resp. K_i) le conoyau (resp. le noyau) du morphisme $H^i_{dR}(U)\oplus H^i_{dR}(V) \to H^i_{dR}(U\cap V)$. Comme les espaces vectoriels K_i et Q_i sont tous de dimension finie et sont nuls fauf pour un nombre fini d'indices, il s'en suit que M est une variété différentielle de type fini. On a par ailleurs des suites exactes de la forme

$$0 \to K_i \to H^i_{dR}(U) \oplus H^i_{dR}(V) \to L_i \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to L_i \to H^i_{dR}(U \cap V) \to Q_i \to 0\,.$$

En vertu du théorème du rang, on a donc

$$\chi(U) + \chi(V) = \sum_i (-1)^i (\dim K_i + \dim L_i) \quad \text{et} \quad \chi(U \cap V) = \sum_i (-1)^i (\dim L_i + \dim Q_i)\,.$$

De même, on a :

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^i (\dim Q_{i-1} + \dim K_i) = \sum_i (-1)^i \dim K_i - \sum_i (-1)^i \dim Q_i\,.$$

On en déduit aussitôt que $\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$.
c) Supposons à présent qu'un groupe fini G agisse librement (et donc aussi proprement) à gauche sur M. On rappelle que pour une représentation $\mathbf{R}$-linéaire V de G, on peut définir son caractère $\chi_V : G \to \mathbf{R}$ comme la fonction qui associe à $g \in G$ la trace de la multiplication par g dans V :

$$\chi_V(g) = \mathrm{Trace}(g : V \to V)\,.$$

On a alors

$$\dim V^G = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g\in G} \chi_V(g)\,.$$

En effet, soit π le projecteur de V défini à la question a) de l'exercice 2. On a alors l'égalité $\mathrm{Trace}(\pi) = \dim V^G$, et la formule résulte alors simplement de la formule $\mathrm{Trace}(a + \lambda b) = \mathrm{Trace}(a) + \lambda \mathrm{Trace}(b)$ pour tous endomorphismes linéaires a et b de V et tout scalaire λ.

Considérons le produit fibré $M \times_{M_{/G}} M = \{(x, y) \in M \times M \mid \exists g \in G\,,\ g.x = y\}$. On a un difféomorphisme

$$G \times M \to M \times_{M_{/G}} M \quad , \qquad (g, x) \mapsto (g.x, x)\,.$$

Ce difféomorphisme est équivariant, lorsqu'on fait agir G sur $G \times M$ (resp. sur $M \times_{M_{/G}} M$) par translations à gauche (resp. par l'action de G) sur le premier facteur, et trivialement sur le second. Cela signifie que lorsqu'on fait agir G sur $M \times_{M_{/G}} M$ sur le second facteur, la seconde projection

$$pr_2 : M \times_{M_{/G}} M \to M$$

est équivariante, et que lorsqu'on passe au quotient sous l'action de G, elle induit la projection canonique

$$M \to M_{/G}\,.$$

Posons $W = H^i_{dR}(M \times_{M_{/G}} M)$ et $V = H^i_{dR}(M)$. L'exercice 2 permet alors de voir V comme une sous-représentation de W, de sorte que $V^G = H^i_{dR}(M_{/G})$ et $W^G = H^i_{dR}(M)$. Pour montrer que

$$\chi(G) \dim H^i_{dR}(M_{/G}) = \dim H^i_{dR}(M)\,,$$

il suffit donc de montrer que l'analogue est vrai au niveau des caractères :

$$\chi(G)\, \chi_V = \chi_W\,.$$

Or cette dernière formule résulte aussitôt du fait que

$$W \simeq H^i_{dR}(G \times M) \simeq \bigoplus_{g \in G} V$$

en tant que représentations de G. On a ainsi prouvé que :

$$\chi(G)\,\chi(M_{/G}) = \chi(M)\,.$$

d) Le calcul de la cohomologie de la sphère montre que

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n\,.$$

Lorsque n est pair, on a donc $\chi(S^n) = 2$, de sorte que, d'après c), l'ordre de tout groupe fini agissant librement sur S^n doit diviser 2. Le seul groupe fini non-trivial admettant une action libre sur une sphère de dimension paire est donc le groupe à deux éléments. Un exempe d'une telle action est fourni par la fonction $x \mapsto -x$.

e) Si n est un entier impair, on a au moins un axe de symétrie de la sphère S^n, d'où une action libre du groupe $U(1) \simeq S^1$. En particulier, le groupe $\mu_d \simeq \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ des racines d-èmes de l'unité agit alors librement sur S^n pour tout entier d. L'existence de ces actions est compatible avec le calcul de la question c) puisque $\chi(S^n) = 0$.