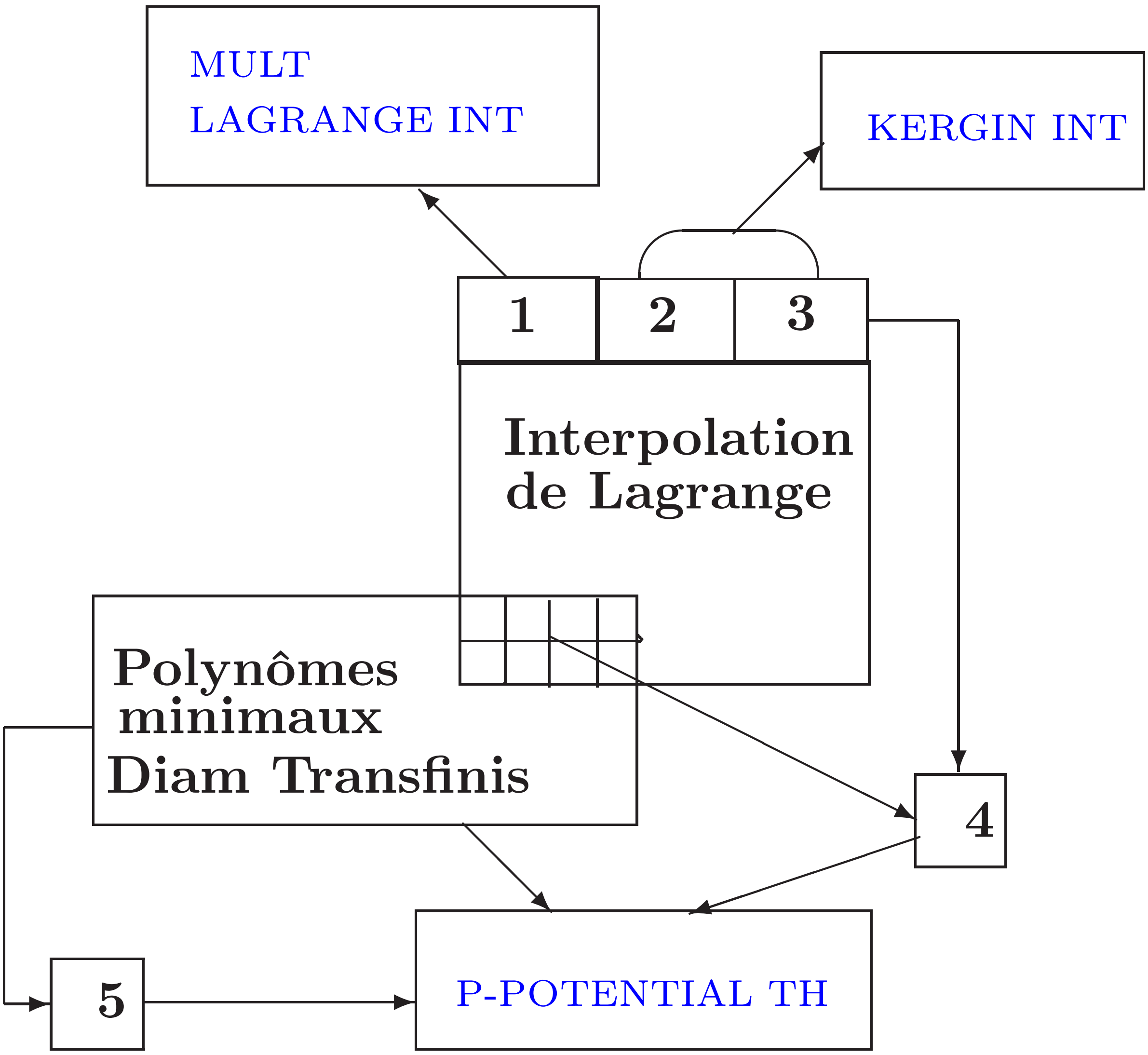
Points de départ ($n = 1$) et directions de recherche ($n > 1$)



$L[A,f,z]$: unique $p \in \Pi_d$ ($|A| = d+1$) tel que $P(a) = f(a)$ pour tout $a \in A$.
$T_{n,K}$: $\|T_{n,K}\|_K = \inf\{\|p\|_K \ : \ p(z) = z^n + (\deg \leq n-1)\}$.

$\boxed{1}$ Interpolation de Lagrange à plusieurs variables

Definitions

- $\Pi_d(\mathbb{C}^n) = \{\text{poly. de deg.} \leq d \text{ à } n \text{ var.}\}$.
- A sous-ensemble *unisolvent* pour $\Pi_d(\mathbb{C}^n)$ ($\Longrightarrow |A| = \dim \Pi_d(\mathbb{C}^n) = \binom{n+d}{n}$)
- $\text{VDM}(A) = \det(a^\alpha)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$.
- $L[A,f,z] = \sum_{a \in A} f(a) \frac{\text{VDM}(A[a \leftarrow z])}{\text{VDM}(A)}$.

Le problème de la discontinuité

Théorème 1 (Bloom & Levenberg) *L'emploi d'une suite d'ensembles* bornés *unisolvents d'ordre* d *(*$d = 0,1,2,\ldots$*) dans* $\mathbb{C}^n$ *ne garantit pas de convergence même pour les fonctions entières.*

Théorème 2 (Bloom & C) *Soit* A_s *une suite d'ensembles unisolvents d'ordre* d *fixé dans* $\mathbb{R}^n$*. Si* $L[A_s,x^\alpha,z] \to 0$ *pour tout* $\alpha : |\alpha| = d+1$ *alors* $L[A_s,f,z] \to \text{Tayl}_0[f,z]$ *pour* f *de classe* C^l *au voisinage de* 0, $l = \binom{n+d}{n} - 1$.

Ses conséquences sur la théorie

Une idée récente : exploiter l'ordre sur les monômes

Une famille $A = (a_\alpha : |\alpha| \leq d)$ est *unisolvente par blocs* si pour $k = 0,1,\ldots d$, $A^k = \{a_\alpha : |\alpha| \leq k\}$ est unisolvent d'ordre k.

Les tableaux d'enlacements (intertwining arrays)

$A = (a_\alpha,\alpha \in \mathbb{N}^n_d)$ points distincts dans $\mathbb{C}^n$,
$B = (b_\alpha,\alpha \in \mathbb{N}^m_d)$ dans $\mathbb{C}^m$.

$$A \oplus B := \left(x_\alpha = (a_{\alpha^1}; b_{\alpha^2}),\alpha \in \mathbb{N}^{n+m}_d\right)$$

Théorème 3 (C) *$A \oplus B$ est unisolvent (de degré d) si et seulement si A et B sont unisolvents par blocs dans leur espace respectif.*

Théorème 4 (C)

$$\text{VDM}(A \oplus B) = \prod_{i=1}^{d} \left(\text{VDM}(A^i)\right)^{h_{d-i}(m)} \prod_{j=1}^{d} \left(\text{VDM}(B^j)\right)^{h_{d-j}(n)}$$

avec $h_l(r) = \binom{r+l-1}{l}$.

Alternatives

(1) On fait dépendre des points d'interpolation l'espace des polynômes dans lequel on cherche l'interpolant.

(2) On continue à interpoler dans $\Pi_d(\mathbb{C}^n)$ mais en un plus petit nombre de points et on lève l'indétermination en imposant d'autres conditions à l'opérateur d'interpolation.

Les projecteurs polynomiaux qui préservent les Relations Différentielles Homogènes

Un projecteur $\pi : H(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \Pi_d(\mathbb{C}^n)$ préserve les RDH si pour tout $k \geq 1$ et Q homogène de degré k,

$$Q(D)(f) = 0 \implies Q(D)\pi(f) = 0.$$

Théorème 5 (Filipsson & C) *Un projecteur polynomial continu sur $\Pi_d(\mathbb{C}^n)$ $(n > 1)$ qui préserve les RDH interpole au maximum en $d+1$ points et s'il interpole en $d+1$ points alors c'est un projecteur de Kergin.*

$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ Interpolation de Kergin

La fonctionnelle du simplexe

Ω ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), $A = \{a_0, \ldots, a_d\} \subset \Omega$ un ensemble de d points non nécessairement distincts,

$$\int_{[a_0,\ldots,a_d]} f = \int_{\Delta^i} f(\sum_{j=0}^{d} t_j a_j) dm(t).$$

avec $\Delta^d = \{t \in \mathbb{R}^{i+1} \,:\, t_0 + t_1 + \ldots t_d = 1\}$

L'interpolant de Kergin

Pour $f \in C^d(\Omega)$ (ou $f \in H(\Omega)$)

$$K[A,f;z] = \sum_{i=0}^{d} \int_{[a_0,\ldots,a_i]} D_{z-a_0} \ldots D_{z-a_{i-1}} f$$

avec D_u : dérivée suivant le vecteur u.

Extensions

(1) En analyse complexe : aux ouverts $\mathbb{C}$-convexes.
(2) En analyse réelle : à des fonctions moins différentiables.

$\boxed{2}$ Interpolation de Kergin à deux variables réelles

Une formule presque effective

Théorème 6 (Bos & C) *Si* $A = \{x^1, \ldots, x^d\}$ *sont* d *points en* position générale *dans* $\mathbb{R}^2$ *alors*

$$K[A,f;x] = \sum_{i=1}^{d} f(x^j)p_j + \sum_{1\le s<t\le d} \int_{[x^s,x^t]} D_{(x^t-x^s)^\perp} f\, p_{st}$$

où les p_j *et* p_{st} *sont des polynômes facilement calculables et* $u^\perp$ *le vecteur (directement) orthogonal à* u *et de même norme.*

Interpolation aux racines de l'unité

$x^j = \exp(\frac{2i(j-1)\pi}{d})$, $p_s(x) = \Re\left\{\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\left[\frac{x_1+ix_2)}{x^j}\right]^k\right\}$ et

$$p_{st}(x) = C(s,t)\frac{T_k(v_{st}\cdot x) - T_k(v_{st}\cdot x^s)}{v_{st}\cdot x - v_{st}\cdot x^s}.$$

Théorème 7 (Bos & C) *La suite des interpolants de Kergin aux racines de l'unité approxime uniformément sur le disque fermé toute fonction de classe* C^2 *au voisinage de ce disque*

$\boxed{3}$ Interpolation de Kergin en analyse complexe (a)

La propriété clé

L'interpolant de Kergin se "réduit" à un interpolant de Lagrange dans le cas des fonctions "ridges" : $g(z) = h(z \bullet t)$

Conséquence :

Si $f(z) = \int N(z \bullet t) d\mu_f(t)$ ($\mu = \mu_f$) alors

$$\mathbf{K}[a_0, \ldots, a_d; f] = \int \mathbf{L}[a_0 \bullet t, \ldots, a_d \bullet t; N](t \bullet z) d\mu_f(t).$$

$\Longrightarrow$ Etudier un problème d'interpolation de Kergin c'est alors étudier un problème d'interpolation de Lagrange à paramètres...

$\boxed{3}$ Interpolation de Kergin en analyse complexe (b)

Un théorème d'approximation des fonctions holomorphes

(1) K un compact $\mathbb{C}$-convexe régulier (non inclus dans un hyperplan),
(2) (A^d) une suite de tableaux $A^d = \{a_i^d), i = 0, \ldots d\}$ de points dans K,
(3) $\mu_d = \frac{1}{d+1}[a_i^d]$ $d = 0, 1, \ldots$
(4) $\mathcal{M}(A)$ l'ensemble des limites faibles de la suite (μ_d).
Le tableau A est *extrémal* si

$$f \in H(K) \implies K[A^d, f] \xrightarrow{\text{unif.}} f \quad \text{sur } K.$$

Théorème 8 (Bloom & C) *Pour que A soit extrémal il faut et il suffit que pour toute forme linéaire non nulle ℓ et toute limite $\mu \in \mathcal{M}(A)$, le* balayage *de la mesure image $\ell \star \mu$ coïncide avec la* mesure d'équilibre *du compact $l(K)$.*

Exemples

(1) Dans les convexes circulaires de $\mathbb{C}^n$,
(2) Dans les convexes de $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{5}$ Diamètre transfini et pluripotentiel (a)

Définition

E compact dans $\mathbb{C}^n$

$$D(E) = \lim_{d\to\infty} \left(\sqrt[l_d]{\sup_{z_\beta \in E} \left| \det(z_\beta^\alpha) \right|} \right)$$

où $l_d = \binom{n+d}{n+1}$ et, dans la matrice (z_β^α), α et β parcourent tous les multi-indices de longueur inférieure où égale à d.

Comment étudier le diamètre transfini ?

$$D(E) = \lim_{d\to\infty} \Big(\prod_{|\alpha|=d} \mathsf{T}(\alpha,E)\Big)^{\frac{1}{dh_d}}$$

où $T(\alpha,E) = \inf_{a_\beta}\{||z^\alpha + \sum_{\beta \prec_{\text{lex}} \alpha} a_\beta z^\beta||_E\}$.

$$D(E) = \exp\left(\frac{1}{m(\Sigma_0)} \int_{\Sigma_0} \ln(\tau(E,\theta)) dm(\theta) \right)$$

où $\Sigma_0 := \{\theta \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \theta_i = 1, \theta_i > 0\}$ et $\tau(E,\theta) = \lim_{\frac{\alpha}{|\alpha|}\to\theta} \mathsf{T}(\alpha,E)^{\frac{1}{|\alpha|}}$.

$\boxed{5}$ Diamètre transfini et pluripotentiel (b)

Liens au pluripotentiel

(1) E compact de $\mathbb{C}^n$
(2) V_E : fonction extrémale de Green-Siciak ($V_E = \sup\{\varphi : \varphi \in \mathrm{PSH}_{\ln}(\mathbb{C}^n), \varphi \leq 0 \text{ sur } E\}$)
(3) E est régulier si V_E est continue.
(4) La *fonction de Robin* de E est définie sur $\mathbb{P}^{n-1}$, par $\rho_E([z]) = \limsup_{|\lambda|\to\infty} (V_E(\lambda z) - \log|\lambda z|)$ où $z \in \mathbb{C}^n - \{0\}$, $|.|$ est la norme euclidienne et $[z]$ est le point que détermine z dans $\mathbb{P}^{n-1}$.

Théorème 9 (Bloom & C) *Si E et F sont des compacts* réguliers *de $\mathbb{C}^n$ alors*

$$\inf_{\mathbb{P}^{n-1}} \frac{e^{-\rho_E}}{e^{-\rho_F}} \leq \frac{D(E)}{D(F)} \leq \sup_{\mathbb{P}^{n-1}} \frac{e^{-\rho_E}}{e^{-\rho_F}}.$$

$\boxed{5}$ Polynômes minimaux de plusieurs variables et applications polynomiales

Un théorème élémentaire

(1) E un compact de $\mathbb{C}$ (contenant au moins $d+1$ points),
(2) q un polynôme unitaire de degré $m \geq 1$ et $F = q^{-1}(E)$.

Théorème 10 (Bloom & C) *Si $T = T_{d,E}$ est le polynôme minimal de degree d pour E alors $T \circ q$ est le polynôme minimal de degré md pour $F = q^{-1}(E)$:*

$$T_{md,F} = T_{d,E} \circ q$$

Une version multidimensionnelle

(1) E compact de $\mathbb{C}^n$,
(2) $q = (q_1, \ldots, q_n)$ une application polynomiale simple de degré m $\big(q_i(z) = z_i^m + (\deg \leq m-1)\big)$,
(3) $F = q^{-1}(E)$,

$$q_\star(p)(w) = \frac{1}{m^n} \sum_{z \in q^{-1}(w)} p(z) \quad (w \in \mathbb{C}^n),$$

$$\mathcal{P}(\alpha) := \{p : p(z) = z^\alpha + \sum_{\beta \prec \alpha} a_\beta z^\beta, a_\beta \in \mathbb{C}\}.$$

Théorème 11 (Bloom & C) *(1) T_E $\mathcal{P}(\alpha)$-minimal pour $E \implies T_E \circ q$ $\mathcal{P}(m\alpha)$-minimal pour F.*
(2) T_F $\mathcal{P}(m\alpha)$-minimal pour F alors $q_\star(T_F)$ $\mathcal{P}(\alpha)$-minimal pour E.