

Membres de certains lieux de connexité

Xavier Buff : Université Paul Sabatier, Laboratoire Emile Picard, U.F.R.-M.I.G, 31062 Toulouse Cedex, France.

E-mail : buff@picard.ups-tlse.fr

Résumé.

Dans cette Note, on s'intéresse au lieu de connexité M_d des polynômes de degré d de la forme : $P_\lambda(z) = \lambda z + z^d$, $\lambda \in \mathbb{C}$. On montre que toutes les composantes connexes de $M_d \setminus \overline{\mathbb{D}}$, où \mathbb{D} désigne le disque unité, sont homéomorphes à des membres de l'ensemble de Mandelbrot.

Limbs of some connectedness loci.

Abstract.

In this Note, we study the connectedness locus M_d of the polynomials of degree d : $P_\lambda(z) = \lambda z + z^d$, $\lambda \in \mathbb{C}$. We show that all connected components of $M_d \setminus \overline{\mathbb{D}}$, where \mathbb{D} is the unit disk, are homeomorphic to limbs of the Mandelbrot set.

Abridged English Version

Let M_d be the connectedness locus of the family of polynomials

$$P_{\lambda,d}(z) = \lambda z + z^d,$$

$\lambda \in \mathbb{C}$. If $p \geq 0$ and $q \geq 1$, $p < q$ are two relatively prime integers, the limb $L_{p/q}(d)$ is the unique connected component of M_d which contains the point $\lambda = e^{2i\pi p/q}$ in its closure. We will show that if the least common multiple of q_1 and $d_1 - 1$ is equal to the least common multiple of q_2 and $d_2 - 1$, then for any p_1 relatively prime with q_1 and any p_2 relatively prime with q_2 , the limbs $L_{p_1/q_1}(d_1)$ and $L_{p_2/q_2}(d_2)$ are homeomorphic.

We first show that the connectedness locus M_d is invariant under the rotation $\lambda \mapsto e^{2i\pi/(d-1)}\lambda$, by showing that when $\lambda \neq 0$, the polynomial $P_{\lambda,d}(z)$ is semi-conjugate to the polynomial

$$F_{\mu,d}(\zeta) = \mu\zeta \left(1 + \frac{\zeta}{d-1}\right)^{d-1},$$

where $\mu = \lambda^{d-1}$ and $\zeta = (d-1)z^{d-1}/\lambda$. This family of polynomials has already been investigated by Douady, Branner and Fagella (see [BD] and [BF]). The connectedness locus \mathcal{M}_d of the family of polynomials $F_{\mu,d}(z)$, $\mu \in \mathbb{C}^*$, has limbs $\mathcal{L}_{p/q}(d)$. Branner Douady and Fagella have proved that the limb $\mathcal{L}_{p/q}(2)$ is homeomorphic to the limb $\mathcal{L}_{0/1}(q+1)$. Their methods can be generalized to prove that for any degree $d \geq 2$, if $p \geq 0$ and $q \geq 1$, $p < q$ are two relatively prime integers, the limb $\mathcal{L}_{p/q}(d)$ is homeomorphic to the limb $\mathcal{L}_{0/1}((d-1)q+1)$.

Combining this result with the relation between the two connectedness loci M_d and \mathcal{M}_d will prove our result.

1 Introduction

Définition 1 On note M_d l'ensemble des paramètres $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels l'ensemble de Julia $J(P_{\lambda,d})$ du polynôme $P_{\lambda,d}(z) = \lambda z + z^d$ est connexe.

Sur la figure 1, nous avons dessiné M_2 , M_3 , M_4 , et M_5 .

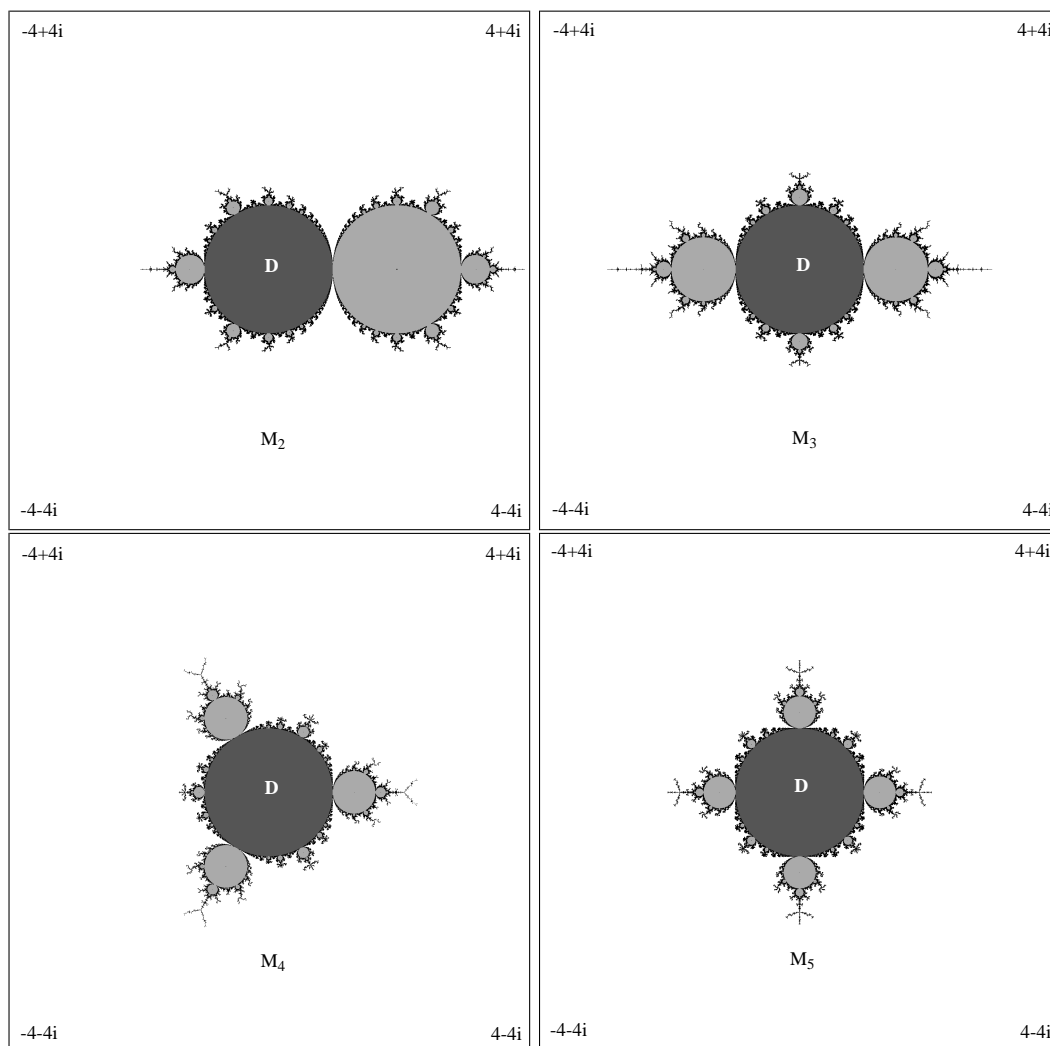


Figure 1: Les lieux de connexités M_2 , M_3 , M_4 , et M_5 .

Notons que

$$P_{\lambda,d}(e^{2i\pi/(d-1)}z) = e^{2i\pi/(d-1)}P_{\lambda,d}(z).$$

D'autre part, les points critiques de $P_{\lambda,d}$ sont les $d-1$ solutions ω_i , $i = 1, \dots, d-1$ de l'équation $\omega^{d-1} = -\lambda/d$. Par conséquent, si un point critique a une orbite bornée, tous les points critiques ont une orbite bornée, et l'ensemble de Julia est connexe. Par ailleurs le polynôme $P_{\lambda,d}$ a un point fixe en 0, de multiplicateur λ . Lorsque $\lambda \in \mathbb{D}$, ce point fixe est attractif et attire un point critique. Donc $\mathbb{D} \subset M_d$, pour tous les degrés $d \geq 2$.

Définition 2 Soient $p \geq 0$ et $q \geq 1$, $p < q$ deux entiers premiers entre eux. Le membre p/q de M_d , qu'on notera $L_{p/q}(d)$, est l'unique composante connexe de $M_d \setminus \overline{\mathbb{D}}$ qui contient $e^{2i\pi p/q}$ dans son adhérence.

L'unicité de cette composante connexe découle des résultats d'Atela [A]. L'inégalité de Yoccoz (voir [H]) permet également de montrer que toute composante connexe de $M_d \setminus \overline{\mathbb{D}}$ contient un unique point de la forme $e^{2i\pi p/q}$ dans son adhérence. Il n'y a donc aucun problème à parler du membre p/q du lieu de connexité M_d .

Nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 1 *Si $\text{ppcm}(q_1, d_1 - 1) = \text{ppcm}(q_2, d_2 - 1)$, alors pour tout p_1 premier avec q_1 et tout p_2 premier avec q_2 , les membres $L_{p_1/q_1}(d_1)$ et $L_{p_2/q_2}(d_2)$ sont homéomorphes.*

Par exemple, le membre $1/4$ de M_3 et le membre $1/4$ de M_2 sont homéomorphes. Nous avons agrandi ces membres sur la figure 2.

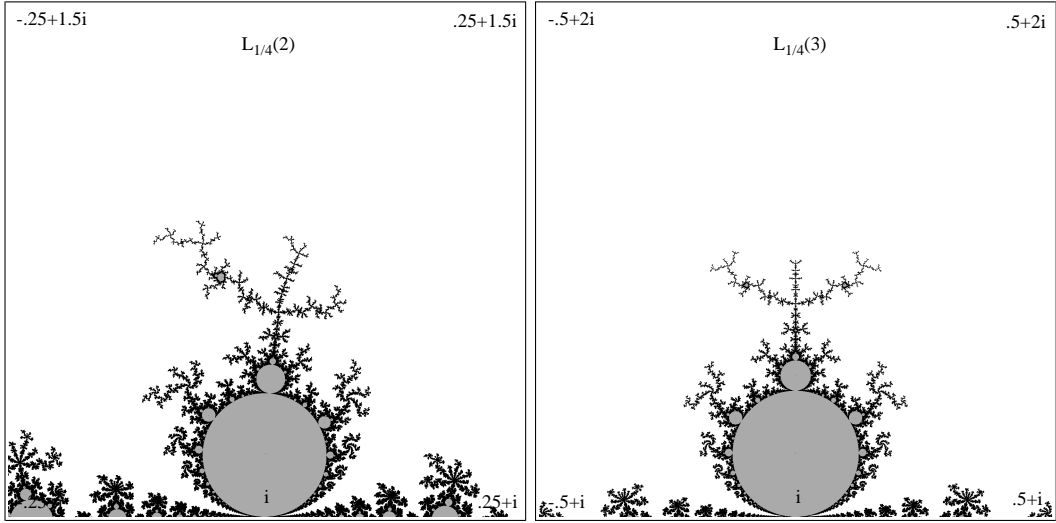


Figure 2: Le membre $1/4$ de M_2 et le membre $1/4$ de M_3 .

2 La symétrie du lieu de connexité M_d .

Proposition 1 *Le lieu de connexité M_d est invariant par rotation $\lambda \mapsto e^{2i\pi/(d-1)}\lambda$.*

PREUVE. Pour montrer l'invariance de M_d par rotation d'angle $1/(d-1)$ tours, on va montrer que si $\lambda \neq 0$, le polynôme $P_{\lambda,d}(z)$ est semi-conjugué au polynôme

$$F_{\mu,d}(\zeta) = \mu\zeta(1 + \zeta/d - 1)^{d-1},$$

où $\mu = \lambda^{d-1}$ et $\zeta = (d-1)z^{d-1}/\lambda$. Ceci montrera que $J(P_{\lambda,d})$ est connexe si et seulement si $J(F_{\lambda^{d-1},d})$ est connexe. Donc, $M_d \setminus \{0\}$ est un revêtement de degré $d-1$ du lieu de connexité des polynômes $F_{\mu,d}$, et il est alors clair que M_d est invariant par la rotation $\lambda \mapsto e^{2i\pi/(d-1)}\lambda$.

Pour montrer que le polynôme $P_{\lambda,d}(z)$ est semi-conjugué au polynôme $F_{\mu,d}(\zeta)$, on note que comme

$$P_{\lambda,d}(e^{2i\pi/(d-1)}z) = e^{2i\pi/(d-1)}P_{\lambda,d}(z),$$

on peut passer au quotient $z \sim e^{2i\pi/(d-1)}z$. Le polynôme $P_{\lambda,d}$ est alors semi-conjugué via $w = z^{d-1}$, au polynôme:

$$Q_{\lambda,d}(w) = (z(\lambda + z^{d-1}))^{d-1} = w(\lambda + w)^{d-1}.$$

Par ailleurs, on peut considérer le changement de variable $\zeta = (d-1)w/\lambda$. On voit alors que le polynôme $Q_{\lambda,d}$ est conjugué au polynôme

$$\frac{d-1}{\lambda}Q_{\lambda,d}\left(\frac{\lambda}{d-1}\zeta\right) = \frac{d-1}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{d-1}\zeta\right)\left(\lambda + \frac{\lambda}{d-1}\zeta\right)^{d-1} = \lambda^{d-1}\zeta\left(1 + \frac{\zeta}{d-1}\right)^{d-1}.$$

Ceci montre qu'au lieu de considérer la famille de polynôme $P_\lambda(z)$, on peut étudier la famille de polynômes $F_{\mu,d}(\zeta)$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Cette famille a déjà été investiguée en degré $d = 3$ par Branner et Douady [BD], et pour des degrés supérieurs par Branner et Fagella [BF].

Définition 3 On note \mathcal{M}_d l'ensemble des paramètres $\mu \in \mathbb{C}$ pour lesquels l'ensemble de Julia $J(F_{\mu,d})$ est connexe. Si p et q sont premiers entre eux, le membre $\mathcal{L}_{p/q}(d)$ est la composante connexe de $\mathcal{M}_d \setminus \overline{\mathbb{D}}$ qui contient le point $e^{2i\pi p/q}$ dans son adhérence.

Remarque : l'application $\lambda \mapsto \lambda^{d-1}$ envoie le membre $\mathcal{L}_{p/q}(d)$ sur le membre $\mathcal{L}_{p'/q'}(d)$, où $p'/q' = (d-1)p/q$. En particulier, $q' = q/\text{pgcd}(q, d-1)$.

3 Les homéomorphismes de Branner, Douady, Fagella

Un des résultats de Branner, Douady et Fagella est : si $p \geq 0$ et $q \geq 1$ sont deux nombres premiers entre eux, le membre $\mathcal{L}_{p/q}(2)$ est homéomorphe au membre $\mathcal{L}_{0/1}(q+1)$. C'est grâce à ce résultat que Branner et Fagella montrent que si p et p' sont premiers avec q , les deux membres p/q et p'/q de l'ensemble de Mandelbrot sont homéomorphes. On va reprendre leur construction pour montrer le résultat suivant.

Proposition 2 Pour n'importe quel degré $d \geq 2$, si $p \geq 0$ et $q \geq 1$ sont deux nombres premiers entre eux, le membre $\mathcal{L}_{p/q}(d)$ est homéomorphe au membre $\mathcal{L}_{0/1}((d-1)q+1)$.

Remarque : Le théorème énoncé dans l'introduction découle de cette proposition. En effet, nous avons vu que le membre $\mathcal{L}_{p/q}(d)$ est homéomorphe au membre $\mathcal{L}_{p'/q'}(d)$, avec $q' = q/\text{pgcd}(q, d-1)$. On a alors $(d-1)q' = \text{ppcm}(q, d-1)$. Par conséquent, le membre $\mathcal{L}_{p'/q'}(d)$ est homéomorphe au membre $\mathcal{L}_{0/1}(\text{ppcm}(q, d-1) + 1)$, et on voit que si $\text{ppcm}(q_1, d_1 - 1) = \text{ppcm}(q_2, d_2 - 1)$, alors pour tout p_1 premier avec q_1 et tout p_2 premier avec q_2 , les membres $\mathcal{L}_{p_1/q_1}(d_1)$ et $\mathcal{L}_{p_2/q_2}(d_2)$ sont homéomorphes.

PREUVE. Nous allons construire une application

$$h : \mathcal{L}_{p/q}(d) \rightarrow \mathcal{L}_{0/1}((d-1)q+1),$$

en suivant les étapes de la chirurgie opérée par Branner, Douady et Fagella. Nous ne montrerons pas dans cette note que cette application est un homéomorphisme, mais la démonstration est en tout point similaire à la construction décrite dans [BF].

Remarquons d'abord que le polynôme $F_{\mu,d}$ est un polynôme de degré d , ayant exactement deux points critiques: $\omega_1 = -(d-1)$ de multiplicité $d-2$, et $\omega_2 = -(d-1)/d$ de multiplicité 1. De plus, $F_{\mu,d}(\omega_1) = 0$, et 0 est fixe. Si $\mu \in \mathcal{L}_{p/q}(d)$, alors le point fixe 0 a un nombre de rotation p/q . C'est-à-dire qu'il existe q rayons externes $R(\theta_i)$, $i = 1, \dots, q$ qui aboutissent en 0 et qui séparent le plan complexe en q régions U_i , $i = 0, \dots, q-1$. On numérote les rayons externes $R(\theta_i)$ et les régions U_i en respectant l'ordre cyclique au point α (sens trigonométrique), de sorte que ω_2 appartienne à U_0 et que U_0 soit bordée par les rayons externes $R(\theta_1)$ et $R(\theta_q)$ (voir figure 3).

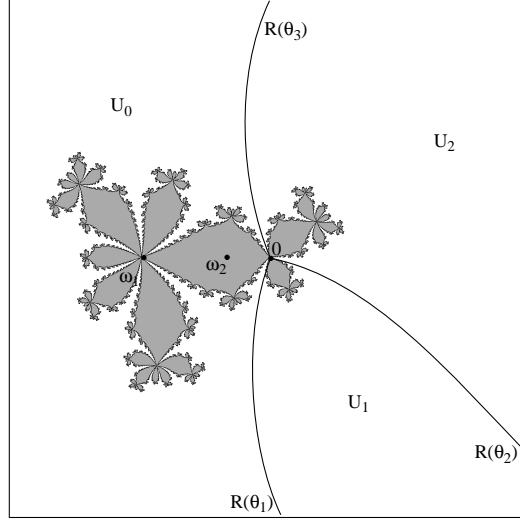
Remarque : La valeur critique $F_{\mu,d}(\omega_2)$ est contenue dans la région U_p , qui contient $0 = F_{\mu,d}(\omega_1)$ dans son adhérence. Par conséquent, ω_1 se trouve dans l'adhérence de $F_{\mu,d}^{-1}(U_p) \subset U_0$, ce qui montre que $\omega_1 \in U_0$. En particulier, si $i \neq 0$,

$$F_{\mu,d} : U_i \rightarrow U_{i+p \pmod q}$$

est un isomorphisme.

On considère alors la surface de Riemann \overline{U} obtenue en recollant U_0 le long des deux rayons externes $R(\theta_1)$ et $R(\theta_q)$ de manière à faire coïncider les potentiels. On note

- π la projection de U_0 dans \overline{U} ,
- $\ell = \pi(R(\theta_1)) = \pi(R(\theta_q))$ la couture, et
- $\ell' = \pi\left(F_{\mu,d}^{-1}(R(\theta_i))\right)$, $i = 1, \dots, q$

Figure 3: Les régions U_i et les rayons $R(\theta_i)$.

On peut alors définir une application $\bar{F}_{\mu,d}$ de premier retour dans \bar{U} , qui est bien définie en dehors de ℓ' :

$$\bar{F}_{\mu,d}(\pi(z)) = \pi(F_{\mu,d}^k(z)),$$

où k est le plus petit entier tel que $F_{\mu,d}^k(z) \in U_0$.

Remarque : les rayons de ℓ' aboutissent en $\pi(\omega_1)$ et séparent \bar{U} en $(d-1)q$ régions. L'application $\bar{F}_{\mu,d}$ envoie chacune de ces régions sur $\bar{U} \setminus \ell$. De plus, la restriction de $\bar{F}_{\mu,d}$ à chacune de ces régions est un isomorphisme, sauf pour la région qui contient $\pi(\omega_2)$, la restriction de $\bar{F}_{\mu,d}$ à cette région étant un revêtement de degré 2, ramifié en $\pi(\omega_2)$.

Cette application de premier retour est analytique dans $\bar{U} \setminus \ell'$, mais ne peut pas être prolongée à ℓ' où l'application est discontinue. Cependant, cette discontinuité n'est pas trop méchante, étant donné que lorsque $\pi(z)$ tend vers ℓ' dans \bar{U} , $\bar{F}_{\mu,d}(\pi(z))$ tend vers ℓ . Les techniques développées par Branner, Douady et Fagella permettent de montrer qu'on peut lisser $\bar{F}_{\mu,d}$ au voisinage de ℓ' : il existe

- un voisinage S' de ℓ' dans $\bar{U} \setminus \pi(K(F_{\mu,d}) \cap U_0)$, composé de secteurs centrés sur les rayons de ℓ' et ayant pour sommet $\pi(\omega_1)$,
- des ouverts simplement connexes $U' \subset \bar{U}$ et $U \subset \bar{U}$ contenant $\pi(K(F_{\mu,d}) \cap U_0)$ et tels que U' soit relativement compact dans U ,
- une application quasi-régulière $\bar{G}_{\mu,d} : U' \rightarrow U$ qui coïncide avec $\bar{F}_{\mu,d}$ sur $U' \setminus S'$, et
- une structure complexe σ sur U , qui est $\bar{G}_{\mu,d}$ -invariante, et qui coïncide avec la structure complexe de \bar{U} sur $\pi(K(\bar{F}_{\mu,d}) \cap U_0)$.

On peut alors choisir un homéomorphisme quasi-conforme $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ qui intègre σ . On pose $V = \phi(U)$, $V' = \phi(U')$, et

$$G_{\mu,d} = \phi \circ \bar{G}_{\mu,d} \circ \phi^{-1} : V' \rightarrow V.$$

Puisque $\bar{G}_{\mu,d}^* \sigma = \sigma$, l'application $G_{\mu,d}$ est holomorphe, et c'est une application à allure polynômiale (voir [DH]).

La remarque précédente permet de voir que $G_{\mu,d} : V' \rightarrow V$

- est un revêtement de degré $(d-1)q + 1$,
- a un point fixe $\phi(\pi(0))$,
- a un point critique de multiplicité $(d-1)q - 1$ en $\phi(\pi(\omega_1))$,

- envoie $\phi(\pi(\omega_1))$ sur le point fixe $\phi(\pi(0))$, et
- a un point critique simple en $\pi(\omega_2)$.

Par ailleurs, son ensemble de Julia est connexe, et comme $\overline{F}_{\mu,d}$ fixe le rayon ℓ qui aboutit en $\pi(0)$, le nombre de rotation de l'application $G_{\mu,d}$ au point fixe $\phi(\pi(0))$ est $0/1$. Par conséquent, la classe hybride de $G_{\mu,d}$ intersecte le membre $\mathcal{L}_{0/1}((d-1)q+1)$, en un point $h(\mu)$. Ceci achève la construction de l'application

$$h : \mathcal{L}_{p/q}(d) \rightarrow \mathcal{L}_{0/1}((d-1)q+1).$$

■

References

- [A] P. ATELA, *Bifurcations of Dynamic Rays in Complex Polynomials of Degree Two*, Erg. Th. & Dyn. Sys. **12** (1991) 401-423.
- [BD] B. BRANNER & A. DOUADY, *Surgery on Complex Polynomials*, Proceedings of the Symposium on Dynamical Systems, Mexico, (1986), *Lecture Notes in Math.*, **1345**, 11-72, Springer.
- [BF] B. BRANNER & N. FAGELLA, *Homeomorphisms between Limbs of the Mandelbrot Set*, MSRI Preprint 043-95, (1995).
- [DH] A. DOUADY & J.H. HUBBARD, *On the Dynamics of Polynomial-like Mappings*, Ann. Scient., Ec. Norm. Sup. 4^e series, 18 (1985) 287-343.
- [H] J.H. HUBBARD, *Local Connectivity of Julia Sets and Bifurcation Loci : Three Theorems of J.C. Yoccoz*, *Topological methods in Modern Mathematics*, Publish or Perrish, (1993), 467-511.