Où sont les zéros des polynômes ?

Xavier Buff

Institut de Mathématiques de Toulouse

Quelles sont les solutions de $x^2 + 2x = 15$?

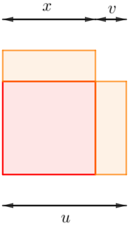
- Solution 1 :
  - $\Delta = 2^2 + 4 \times 15 = 64$;
  - $x = \dfrac{-2 + \sqrt{64}}{2} = 3$ ou $x = \dfrac{-2 - \sqrt{64}}{2} = -5.$

Quelles sont les solutions de $x^2 + 2x = 15$?

- Solution 1 :
  - $\Delta = 2^2 + 4 \times 15 = 64$;
  - $x = \dfrac{-2+\sqrt{64}}{2} = 3$ ou $x = \dfrac{-2-\sqrt{64}}{2} = -5$.
- Solution 2 :
  - $(x+1)^2 - 1 = 15$, c'est-à-dire $(x+1)^2 = 16$;
  - $x + 1 = 4$, c'est-à-dire $x = 3$ ou $x + 1 = -4$, c'est-à-dire $x = -5$.

Approche géométrique

- Résoudre $x^2 + 2x = 15$



- Trouver v tel que $2 \times vx = 2x$; on a $v = 1$.
- $u^2 = x^2 + 2 \times vx + v^2 = x^2 + 2x + v^2 = 15 + v^2 = 16.$
- $x = u - v = 3.$

Polynômes de degré 3

- Quelles sont les solutions de $x^3 - 1 = 0$?

Indice : il y a 3 solutions.

Polynômes de degré 3

- Quelles sont les solutions de $x^3 - 1 = 0$?

Indice : il y a 3 solutions.

- Solution 1 :
  - $x = 1$ est une racine évidente.
  - $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.
  - $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.
  - $x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $x = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
- Solution 2 :
- x est une racine cubique de l'unité.
- $x = 1$ ou $x = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $x = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Polynômes de degré 3

- Quelles sont les solutions de $x^3 - 3x + 1 = 0$?

Indice : poser $x = u + \dfrac{1}{u}$.

Polynômes de degré 3

- Quelles sont les solutions de $x^3 - 3x + 1 = 0$?

Indice : poser $x = u + \dfrac{1}{u}$.

- $x^3-3x+1 = u^3+3u+\dfrac{3}{u}+\dfrac{1}{u^3}-3\left(u+\dfrac{1}{u}\right)+1 = u^3+1+\dfrac{1}{u^3}$.
- $x^3 - 3x + 1 = 0$ si et seulement si $u^6 + u^3 + 1 = 0$.
- On pose $t = u^3$ de sorte que $t^2 + t + 1 = 0$.
- $t \in \{e^{i\frac{2\pi}{3}}; e^{-i\frac{2\pi}{3}}\}$.
  - $\{u; 1/u\} = \{e^{i\frac{2\pi}{9}}; e^{-i\frac{2\pi}{9}}\}$ et $x = u + \frac{1}{u} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$ ou
  - $\{u; 1/u\} = \{e^{i\frac{8\pi}{9}}; e^{-i\frac{8\pi}{9}}\}$ et $x = u + \frac{1}{u} = 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ ou
  - $\{u; 1/u\} = \{e^{i\frac{12\pi}{9}}; e^{-i\frac{12\pi}{9}}\}$ et $x = u + \frac{1}{u} = 2\cos\left(\frac{12\pi}{9}\right)$.

Méthode de Lagrange

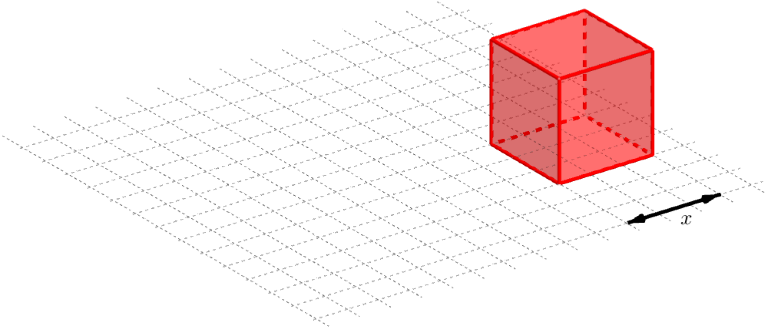
On cherche les solutions de

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

1. Poser $x = y - \dfrac{a}{3}$. L'équation prend la forme
$$y^3 + py + q = 0.$$
2. Poser $y = u - \dfrac{p}{3u}$. L'équation prend la forme
$$u^6 + qu^3 + r = 0.$$
3. Résoudre pour trouver u^3 et conclure.

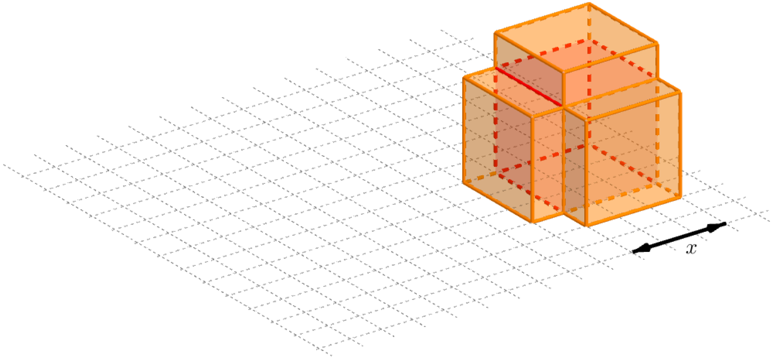
Méthode de Cardan

- Résoudre $x^3 + 12x = 63$



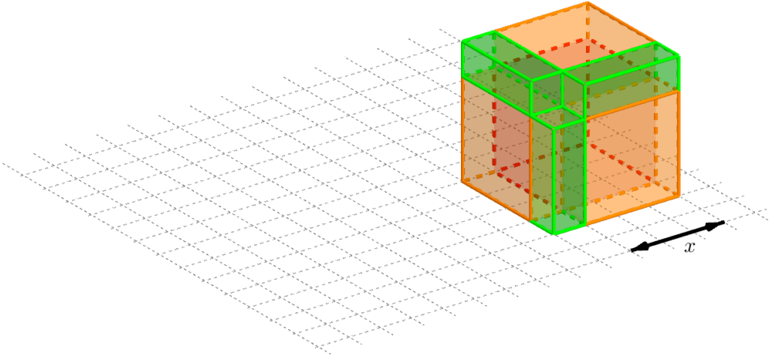
Méthode de Cardan

- Résoudre $x^3 + 12x = 63$



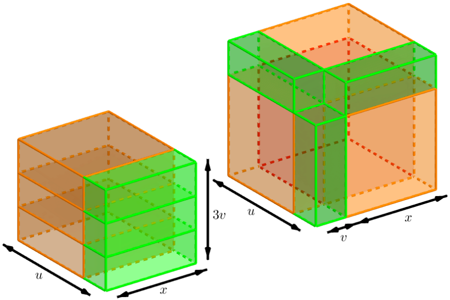
Méthode de Cardan

- Résoudre $x^3 + 12x = 63$



Méthode de Cardan

- Résoudre $x^3 + 12x = 63$



- $u^3 - v^3 = x^3 + 3uvx$.
- On suppose $3uvx = 12x$, c'est-à-dire $uv = 4$.
- Alors $u^3 - v^3 = 63$ et $u^3v^3 = 64$.
- On en déduit que $u^3 = 64$ et $v^3 = 1$, donc $u = 4$ et $v = 1$, donc $x = 4 - 1 = 3$.

Polynômes dont les coefficients sont ± 1

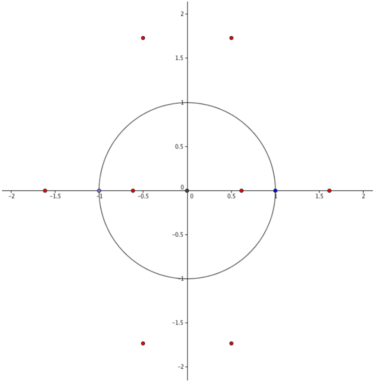
- Quatre polynômes de degré 1 :
  - $P_1(x) = x + 1$,
  - $P_2(x) = x - 1$,
  - $-P_2(x) = -x + 1$,
  - $-P_1(x) = -x - 1$.
- Solutions : $x = 1$ ou $x = -1$.

Polynômes dont les coefficients sont ± 1

- Huit polynômes de degré 2 :
  - $Q_1(x) = x^2 + x + 1$,
  - $Q_2(x) = x^2 + x - 1$,
  - $Q_3(x) = x^2 - x + 1$,
  - $Q_4(x) = x^2 - x - 1$,
  - $-Q_1(x), -Q_2(x), -Q_3(x), -Q_4(x)$.
- Solutions : $x = \pm\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Polynômes dont les coefficients sont ± 1

Polynômes de degré 1 ou 2.

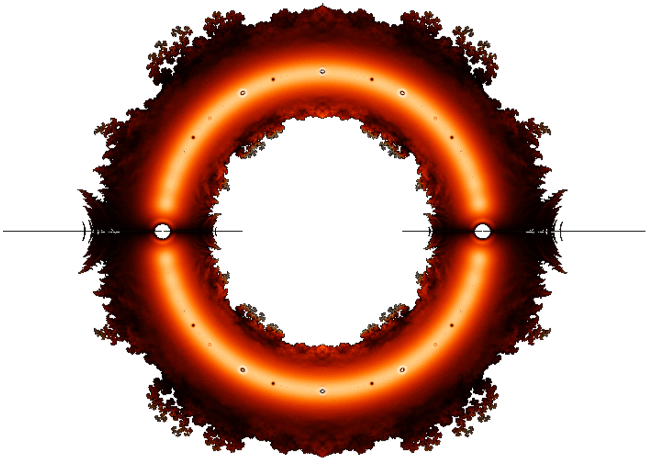


Polynômes dont les coefficients sont ± 1

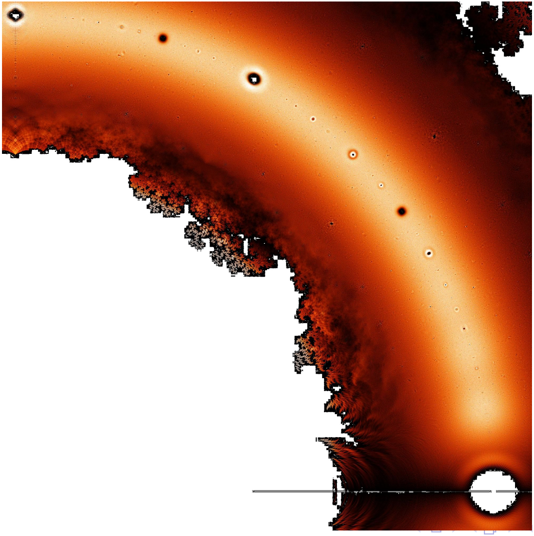
Polynômes de degré ≤ 24.

Polynômes dont les coefficients sont ± 1

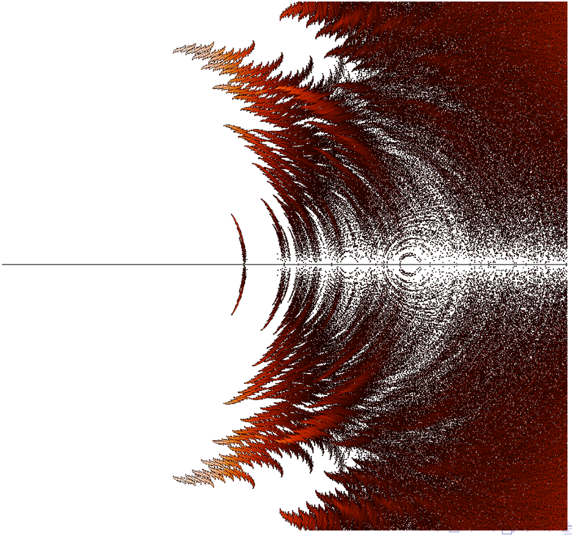
Polynômes de degré ≤ 24.



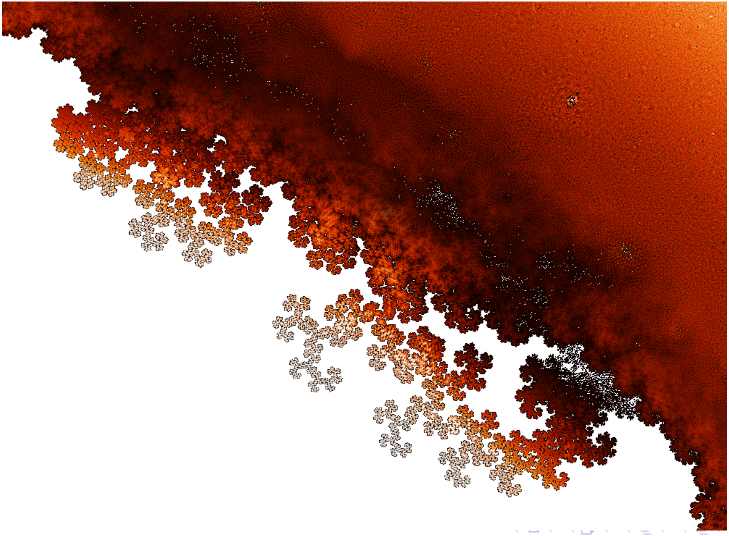
Polynômes dont les coefficients sont ± 1



Polynômes dont les coefficients sont ± 1

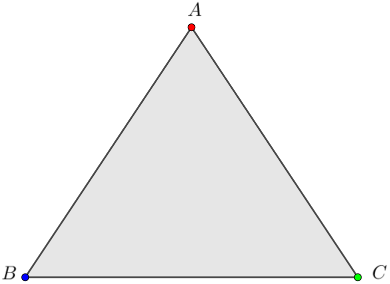


Polynômes dont les coefficients sont ± 1



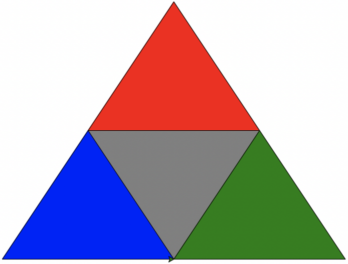
Triangle de Sierpinski

- On considère les trois homothéties f_1, f_2 et f_3 de centres A, B et C et de rapport $1/2$.



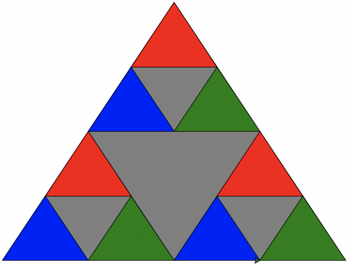
Triangle de Sierpinski

- Les 3 images du triangle par les homothéties $(f_i)_{i\in\{1,2,3\}}$.



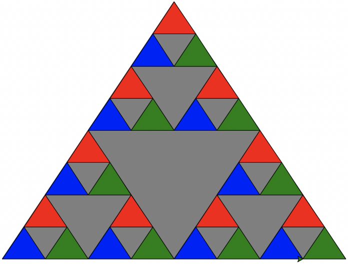
Triangle de Sierpinski

- Les 9 images du triangle par les homothéties $(f_{i_1} \circ f_{i_2})_{(i_1,i_2)\in\{1,2,3\}^2}$.



Triangle de Sierpinski

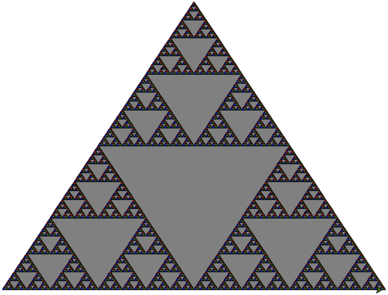
- Les 27 images du triangle par les homothéties $(f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ f_{i_3})_{(i_1,i_2,i_3)\in\{1,2,3\}^3}$.



Triangle de Sierpinski

- L'ensemble des valeurs d'adhérence de toutes les suites (z_k) définies par une récurrence de la forme

$$z_0 \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad z_{k+1} = f_{i_k}(z_k) \quad \text{avec} \quad (i_k) \in \{1,2,3\}^{\mathbb{N}}.$$



- Cet ensemble auto-semblable est composé de 3 copies 2 fois plus petites de lui-même.

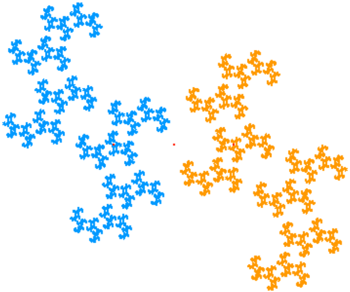
IFS (Iterated Function System)

- On se donne deux similitudes de même rapport complexe $f_+ : z \mapsto a_+ + \lambda(z - a_+)$ et $f_- = z \mapsto a_- + \lambda(z - a_-)$.
- L'attracteur $K(f_+, f_-)$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de toutes les suites (z_k) qui sont définies par une récurrence de la forme

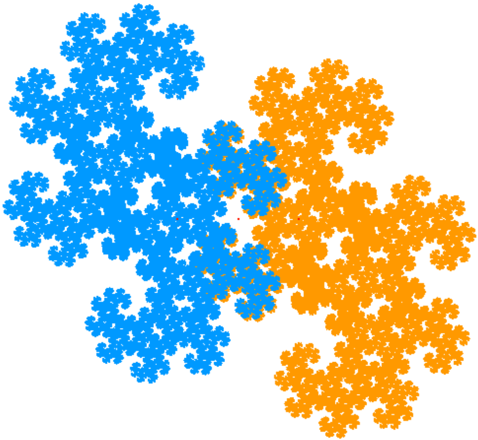
$$z_0 \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad z_{k+1} = f_{i_k}(z_k)$$

  où (i_k) est une suite de $\{+, -\}$.
- L'attracteur $K(f_+, f_-)$ dépend essentiellement du rapport λ ; c'est un ensemble fractal composé de deux copies de lui-même.

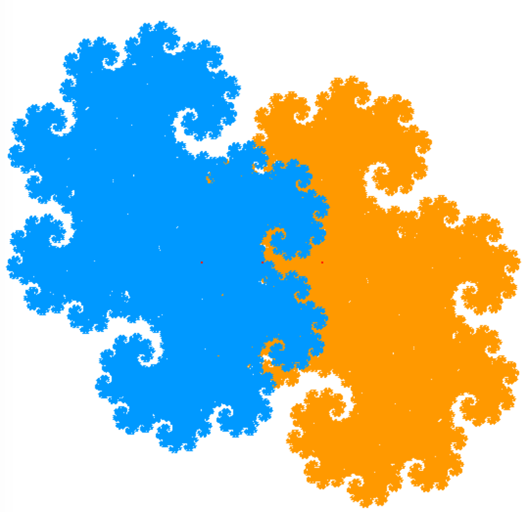
IFS avec deux similitudes de même rapport



IFS avec deux similitudes de même rapport

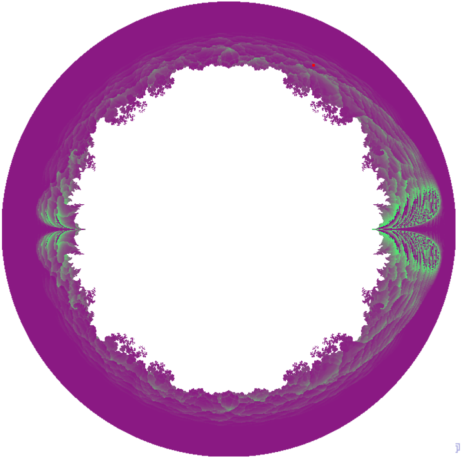


IFS avec deux similitudes de même rapport



IFS

- L'ensemble Λ des paramètres λ tels que $|\lambda| < 1$ et tels que le milieu de $[a_+; a_-]$ appartienne à $K(f_+, f_-)$?



Ré-écriture des polynômes

- On peut écrire

$$\begin{aligned}\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 &= \lambda \cdot \big[\lambda \cdot \big(\lambda \cdot (\lambda \cdot 0 + 1) + 1\big) - 1\big] + 1 \\ &= F_+ \circ F_- \circ F_+ \circ F_+(0)\end{aligned}$$

  avec

$$F_+(z) = \lambda \cdot z + 1 \quad \text{et} \quad F_-(z) = \lambda \cdot z - 1.$$

- Les transformations du plan F_+ et F_- sont des similitudes de centres $\pm\dfrac{1}{1-\lambda}$.
- Si λ est un zéro du polynôme, alors une composée de F_+ et F_- fixe 0. En particulier, si $|\lambda| < 1$ alors $\lambda \in \Lambda$.

Comparaison des deux ensembles