# Convolution

## 1 L'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R}^d)$

**Théorème 1.1.** *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est intégrable et la fonction*

$$(f * g)(x) := \int f(y)g(x-y)dy$$

*est elle-même intégrable sur $\mathbb{R}^d$. De plus*

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1. \tag{1.1}$$

Comme on l'a déjà vu, le fait que $f * g$ soit définie presque partout et intégrable signifie qu'il existe une fonction Lebesgue intégrable et définie partout qui coïncide presque partout avec l'intégrale définissant $f * g$.

*Démonstration.* Par théorème de Tonelli, $g \otimes f : (x, y) \mapsto f(y)g(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et $||g \otimes f||_{L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} = ||f||_{L^1(\mathbb{R}^d)} ||g||_{L^1(\mathbb{R}^d)}$. L'application

$$\Phi : (x, y) \mapsto (x - y, y)$$

est un $C^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ de Jacobien 1, donc par théorème de changement de variable

$$||g \otimes f||_{L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} = ||(g \otimes f) \circ \Phi||_{L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| dx \times dy.$$

Donc $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et la conclusion est une conséquence directe du théorème de Fubini. □

**Définition 1.2.** *$f * g$ s'appelle produit de convolution, ou simplement convolution, de $f$ et $g$.*

Par linéarité de l'intégrale, il est clair que $(f, g) \mapsto f * g$ est bilinéaire. On a aussi les propriétés suivantes.

**Proposition 1.3.** *Le produit de convolution est commutatif et associatif.*

*Démonstration.* On considère $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
<u>Commutativité</u>. Soit $N$ négligeable tel que $y \mapsto f(y)g(x-y)$ et $y \mapsto g(y)f(x-y)$ soient intégrables pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus N$. L'application $\varphi_x : y \mapsto x - y$ est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^d$ de Jacobien $(-1)^d$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus N$,

$$g * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)f(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(\varphi_x(y))f(x - \varphi_x(y))dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y)dy = f * g(x).$$

Associativité. Pour presque tout $x$,

$$(f * g) * h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(y) h(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(z) g(y-z) dz \right) h(x-y) dy, \tag{1.2}$$

où $\int f(z)g(y-z)dy$ est définie pour presque tout $y$. De même,

$$f * (g * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)(g * h)(x-z) dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \left( \int_{\mathbb{R}^d} g(y) h(x-z-y) dy \right) dz. \tag{1.3}$$

Formellement, on passe de (1.3) à (1.2) par changement de variable $y \mapsto y - z$ et théorème de Fubini. On peut le justifier de la façon suivante. Par théorème de Tonelli, $(x, y, z) \mapsto (h \otimes g \otimes f)(x, y, z) = h(x)g(y)f(z)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{3d}$, donc, en considérant le difféomorphisme

$$\Psi(x, y, z) = (x - y - z, y, z)$$

qui vérifie $|\mathrm{det} D\Psi| = 1$, $(h \otimes g \otimes f) \circ \Psi$ est également intégrable. Par théorème de Fubini, cette fonction est intégrable par rapport à $(y, z)$ pour presque tout $x$ et

$$f * (g * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (h \otimes g \otimes f) \circ \Psi(x, y, z) dy \times dz.$$

Par composition avec le difféomorphisme $\Theta : (y, z) \mapsto (y - z, z)$, de Jacobien 1, on a, pour presque tout $x$,

$$\begin{aligned} f * (g * h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (h \otimes g \otimes f) \circ \Psi \circ \Theta(x, y, z) dy \times dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} (h \otimes g \otimes f) \circ \Psi \circ \Theta(x, y, z) dz \right) dy \\ &= (f * g) * h(x), \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini pour passer de la première à la deuxième ligne. $\square$.

**Définition 1.4.** *On appelle approximation de l'identité ou unité approchée toute suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant :*

1. *Moyenne tendant vers* 1 :

$$\int \rho_n \to 1 \qquad n \to \infty,$$

2. *Borne uniforme dans $L^1$ : il existe $C > 0$ telle que*

$$||\rho_n||_1 \leq C \qquad \textit{pour tout } n,$$

3. *Concentration en* 0 : *pour tout $\delta > 0$,*

$$\int_{|x| \geq \delta} |\rho_n| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Dans beaucoup d'exemples, la condition 1 est en fait une égalité : $\int \rho_n = 1$. Dans ce cas, si en plus $\rho_n \geq 0$, la condition 2 devient alors $||\rho_n||_1 = 1$.

**Exemple.** Si $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\int \rho = 1$, alors

$$\rho_n(x) := n^d \rho(nx)$$

est une approximation de l'identité.

La terminologie est justifiée par le théorème suivant.

**Théorème 1.5.** *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'identité. Alors*

$$||f * \rho_n - f||_1 \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Isolons le calcul suivant qui est un raisonnement fondamental pour l'approximation par convolution. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned}
\int \varphi(x-y)\rho_n(y)dy - \varphi(x) &= \int \left(\varphi(x-y) - \varphi(x)\right)\rho_n(y)dy - (1 - \int \rho_n)\varphi(x) \\
&= \int_{|y|<\delta} \left(\varphi(x-y) - \varphi(x)\right)\rho_n(y)dy \\
&\quad + \int_{|y|<\delta} \left(\varphi(x-y) - \varphi(x)\right)\rho_n(y)dy - (1 - \int \rho_n)\varphi(x).
\end{aligned}$$

Noter que dans le cas (fréquent) où $\int \rho_n = 1$, le dernier terme est nul. Dans tous les cas, ceci nous montre que

$$|\varphi * \rho_n(x) - \varphi(x)| \leq \sup_{|y|<\delta} |\varphi(x-y) - \varphi(x)| \int |\rho_n| + \left(|1 - \int \rho_n| + \int_{|y|\geq\delta} |\rho_n| dy\right) ||\varphi||_\infty.$$

En utilisant la continuité uniforme de $\varphi$ sur $\mathbb{R}^d$, nous obtenons le point (1.4) du lemme suivant.

**Lemme 1.6.** *Si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'identité, alors*

$$||\varphi * \rho_n - \varphi||_\infty \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{1.4}$$

*Si en plus, pour un $r > 0$, $\rho_n(y) = 0$ pour presque tout $y \notin \bar{B}(0,r)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, alors*

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset \overline{B}(0,R) \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{supp}(\varphi * \rho_n) \subset \overline{B}(0,R+r). \tag{1.5}$$

*Démonstration.* Il reste à prouver le point (1.5). En effet, si $x \notin \overline{B}(0,R+r)$, on a

$$\varphi * \rho_n(x) = \int \rho_n(y)\varphi(x-y)dy = \int_{\bar{B}(0,r)} \rho_n(y)\varphi(x-y)dy = 0$$

car $\varphi(x-y) = 0$ pour tout $y \in \bar{B}(0,r)$, puisque $|x-y| \geq |x| - |y| > R + r - r = R$. $\square$

*Démonstration du Théorème 1.5.* Soit $r > 0$ (par exemple $r = 1$). Posons $\tilde{\rho}_n = \rho_n \times \chi_{\bar{B}(0,r)}$. Par le point 3 de la Définition, 1.4, on a

$$||\rho_n - \tilde{\rho}_n||_1 \to 0, \qquad n \to \infty.$$

En particulier, $(\tilde\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une approximation de l'identité. De plus

$$\begin{aligned} ||f*\rho_n - f||_1 &\leq ||f*\tilde\rho_n - f||_1 + ||f*(\tilde\rho_n-\rho_n)||_1 \\ &\leq ||f*\tilde\rho_n - f||_1 + ||f||_1||\rho_n-\tilde\rho_n||_1 \end{aligned}$$

où le dernier terme tend vers 0. Par ailleurs, à $\epsilon>0$ fixé, on peut trouver $\varphi\in C_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $||f-\varphi||_1\leq\epsilon$ et alors

$$\begin{aligned} ||f*\tilde\rho_n - f||_1 &\leq ||f-\varphi||_1 + ||\varphi-\varphi*\tilde\rho_n||_1 + ||(f-\varphi)*\tilde\rho_n||_1 \\ &\leq (1+||\tilde\rho_n||_1)\,\epsilon + ||\varphi-\varphi*\tilde\rho_n||_1. \end{aligned}$$

Par le Lemme 1.6, on a $\varphi*\tilde\rho_n(x)\to\varphi(x)$ pour tout $x$ et

$$|\varphi*\tilde\rho_n(x)|\leq C\chi_{\overline{B}(0,R+r)}(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d,\ n\in\mathbb{N},$$

(on peut prendre $C=||\varphi||_\infty+\sup_n||\varphi-\varphi*\tilde\rho_n||_\infty$) donc, par théorème de convergence dominée,

$$||\varphi-\varphi*\tilde\rho_n||_1\to 0, \qquad n\to\infty.$$

En posant $C'=1+\sup_n||\tilde\rho_n||_1$, nous avons donc prouvé que, pour tout $\epsilon>0$, il existe $n_0$ tel que

$$||f-f*\rho_n||_1\leq(C'+1)\epsilon, \qquad n\geq n_0,$$

ce qui donne le résultat. □

**Remarque complémentaire.** En fait, l'élément neutre pour la convolution est la mesure de Dirac à l'origine $\delta_0$. Pour donner un sens à cette affirmation, il faut savoir définir la convolution avec une distribution (ou au moins une mesure). De toute façon, $\delta_0$ n'est pas dans $L^1$ (voir les exercices de F-EDP en M1) et il n'y a pas de neutre pour la convolution qui soit dans $L^1$.

# 2 Convolution avec une fonction régulière

Dans la Section 1, on a vu comment convoluer deux fonctions $f$ et $g$ intégrables sur $\mathbb{R}^d$. La définition utilise un argument abstrait d'intégration, via le théorème de Fubini, qui ne permet de définir $f*g(x)$ que pour presque tout $x$. Nous allons voir ici que si $f$ ou $g$ possède une certaine régularité, ie continue voire $C^k$, et est bornée, alors la fonction $f*g$ est définie ponctuellement (pas seulement presque partout) et a la même régularité.

**Définition 2.1.** *Pour $k\in\mathbb{N}$, on note $C_b^k(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des fonctions $C^k$ qui sont bornées sur $\mathbb{R}^d$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles (d'ordre $\leq k$). On note $C_b^\infty(\mathbb{R}^d)=\cap_{k\in\mathbb{N}}C_b^k(\mathbb{R}^d)$.*

**Exemple.** Les fonctions $C^k$ à support compact, ie nulles à l'extérieur d'un compact, sont dans $C_b^k(\mathbb{R}^d)$. Elles en forment un sous-espace vectoriel qu'on note traditionnellement $C_0^k(\mathbb{R}^d)$ ou $C_c^k(\mathbb{R}^d)$. En particulier, $C_c(\mathbb{R}^d)=C_c^0(\mathbb{R}^d)=C_0^0(\mathbb{R}^d)$.

**Notations.** Un élément $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d$ s'appelle un multi-indice. La *longueur* de $\alpha$ est l'entier

$$|\alpha|:=\alpha_1+\cdots+\alpha_d.$$

(Attention : cette notation, usuelle, n'est pas compatible avec celle de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, ie $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$). Noter que $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$. Pour $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha$ tel que $|\alpha| \leq k$, on note

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots \alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

et on rappelle que, si $|\alpha + \beta| \leq k$,

$$\partial^\alpha \partial^\beta f = \partial^{\alpha+\beta} f,$$

ie $\partial^\alpha(\partial^\beta f) = \partial^{\alpha+\beta} f$, ce qui est une conséquence du lemme de Schwarz.

**Théorème 2.2.** *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in C_b^k(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction*

$$f * g(x) = \int f(y) g(x - y) dy,$$

*est bien définie. De plus $f * g \in C_b^k(\mathbb{R}^d)$ et pour tout multi-indice $\alpha$ de longueur $\leq k$, on a*

$$\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g)\,.$$

Notons que grace au changement de variable $y \mapsto x - y$, on voit que $f(x-y)g(y)$ est intégrable pour tout $x$ et que

$$f * g(x) = \int f(x - y) g(y) dy.$$

*Démonstration.* Pour $k = 0$, $x \mapsto f(y)g(x-y)$ est continue pour presque tout $y$ et

$$|f(y)g(x-y)| \leq ||g||_\infty |f(y)|$$

qui est intégrable, donc $x \mapsto f * g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^d$. Pour $k = 1$, on observe que $x \mapsto f(y)g(x-y)$ est $C^1$ pour presque tout $y$ et, pour tout $j = 1, \ldots, d$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} f(y) g(x-y) \right| \leq |f(y)| ||\partial_j g||_\infty.$$

Par théorème de dérivation sous le signe $\int$, $x \mapsto f * g(x)$ est $C^1$ et $\partial_j(f * g) = f * \partial_j g$. Pour $k \geq 2$, on procède de façon analogue par récurrence. $\square$

**Remarque.** A posteriori, ceci montre que la fonction $\varphi * \rho_n$ du Lemme 1.6 est une fonction continue.

**Corollaire 2.3.** *Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\Omega$ un voisinage quelconque de $K$. Alors il existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\varphi \equiv 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^d \setminus \Omega \qquad \text{et} \qquad \varphi \equiv 1 \quad \text{sur } K.$$

*Démonstration.* Il faut commencer par remarquer que, si on pose

$$K_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathrm{dist}(x, K) \leq \epsilon\}, \tag{2.1}$$

on a $K_\epsilon \subset \Omega$ pour $\epsilon > 0$ petit (couvrir $K$ par des boules de rayon $\leq \epsilon$ contenues dans $\Omega$). Notons aussi que, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver $\rho_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\int \rho_\epsilon = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{supp}(\rho_\epsilon) \subset \overline{B}(0, \epsilon).$$

Pour cela, il suffit de savoir qu'il existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ non identiquement nulle ; on peut alors la supposer $\geq 0$ et d'intégrale 1 quitte à la remplacer par $|\psi|^2 / \int |\psi|^2$. Pour avoir en plus la propriété de support, on considère $R^d \psi(Rx)$ avec $R$ assez grand car $\psi(Rx) = 0$ si $|x| \geq M/R$ en supposant $\text{supp}(\psi) \subset \overline{B}(0, M)$. On constate alors que

$$\varphi(x) := \chi_{K_\epsilon} * \rho_\epsilon(x) = \int_{K_\epsilon} \rho_\epsilon(x - y) dy,$$

vérifie $\text{supp}(\varphi) \subset K_{2\epsilon}$ et $\varphi \equiv 1$ sur $K$. En effet si $x \notin K_{2\epsilon}$ et $y \in K_\epsilon$, alors $|x - y| \geq \epsilon$ donc $\rho_\epsilon(x - y) = 0$ et $\varphi(x) = 0$. Si $x \in K$ et $x - y \in \overline{B}(0, \epsilon)$, on a $y \in K_\epsilon$ de sorte que

$$1 = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\epsilon(x - y) dy = \int_{K_\epsilon} \rho_\epsilon(x - y) dy = \varphi(x)$$

ce qui termine la démonstration puisque $K_{2\epsilon} \subset \Omega$ si $\epsilon$ est assez petit. □

**Proposition 2.4.** *Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ supportée dans un compact $K$. Soit $\Omega$ un voisinage quelconque de $K$. Alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\varphi_n \equiv 0 \ \ \textit{sur } \mathbb{R}^d \setminus \Omega \qquad \textit{et} \qquad ||\varphi - \varphi_n||_\infty \to 0, \qquad n \to \infty,$$

*où $|| \cdot ||_\infty$ est la norme uniforme sur $\mathbb{R}^d$.*

*Démonstration.* La preuve est très proche du Lemme 1.6. On choisit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int \rho = 1$ et $\text{supp}(\rho) \subset \overline{B}(0, 1)$. Alors $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$ est une approximation de l'identié telle que $\text{supp}(\rho_n) \subset \overline{B}(0, 1/n)$. On pose

$$\varphi_n = \varphi * \rho_n.$$

En particulier, en reprenant la notation (2.1), on voit que

$$\text{supp}(\varphi * \rho_n) \subset K_{1/n}, \qquad n \geq 1,$$

car $\varphi * \rho_n(x) = \int_K \varphi(y) \rho_n(x - y) dy = 0$ si $x \notin K_{1/n}$ puisqu'alors $x - y \notin \overline{B}(0, 1/n)$ pour tout $y \in K$. Pour $\epsilon > 0$ assez petit on a $K_\epsilon \subset \Omega$, donc $K_{1/n} \subset \Omega$ pour tout $n$ assez grand et comme $||\varphi_n - \varphi||_\infty \to 0$, on a le résultat. □

**Proposition 2.5.** *Soient $p \in [1, \infty[$ et $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$||u - \varphi_n||_p \to 0, \qquad n \to \infty.$$

*De plus, si $u$ est nulle à l'extérieur d'un compact $K$, et si $\Omega$ est un voisinage quelconque de $K$, on peut supposer toutes les $\varphi_n$ à support dans $\Omega$.*

*Démonstration.* C'est une combinaison de la densité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et de la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $C_c(\mathbb{R}^d)$. Soit $\chi_R$ la fonction caractéristique de $B(0,R)$. Par théorème de convergence dominée, on a $||u - \chi_R u||_p \to 0$. Donc on peut trouver $R_n \to \infty$ telle que $||u - \chi_{R_n} u||_p \leq 1/n$. Puis, par densité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, on peut trouver $\psi_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$||\chi_{R_n} u - \psi_n||_p \leq 1/n.$$

On peut en plus supposer $\psi_n$ supportée dans un voisinage arbitraire de $\overline{B}(0,R_n)$, par exemple $B(0,R_n+1)$. Puis, par la Proposition 2.4, il existe $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $||\psi_n - \phi_j||_\infty \to 0$ quand $j \to \infty$. On peut en plus supposer les $\phi_j$ supportées dans $B(0,R_n+2)$. Cela implique en particulier que, pour tout $j \geq 0$,

$$|\psi_n(x) - \phi_j(x)|^p \leq ||\psi_n - \phi_j||_\infty \chi_{B(0,R_{n+2})}(x)$$

ce qui montre que

$$||\psi_n - \phi_j||_p \to \infty, \qquad j \to \infty.$$

Ainsi, pour $j_n$ assez grand, $||\psi_n - \phi_{j_n}||_p \leq 1/n$ et on obtient le résultat en posant $\varphi_n = \phi_{j_n}$.

Si en plus $u$ est nulle à l'extérieur d'un compact $K$, on choisit d'abord $\psi_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$ supportée dans un voisinage arbitrairement proche de $K$ telle que $||\psi_n - u||_p \leq 1/n$ puis, par un raisonnement analogue à ce qui précède, $\varphi_n$ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ supportée dans un voisinage arbitraire de $\mathrm{supp}(\psi_n)$ telle que $||\varphi_n - \psi_n||_p \leq 1/n$. □

On peut améliorer la proposition précédente.

**Proposition 2.6.** *Soient $1 \leq p \leq q$ deux réels et $u \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que,*

$$||u - \varphi_n||_p \to 0 \qquad \textit{et} \qquad ||u - \varphi_n||_q \to 0,$$

*quand $n \to \infty$.*

*Démonstration.* Notons $\chi_R$ la fonction caractéristique de $B(0,R)$. Par théorème de convergence dominée, on a

$$||\chi_R u - u||_p \to 0 \qquad ||\chi_R u - u||_q \to 0$$

quand $R \to \infty$. En particulier, pour chaque $n > 0$, on peut trouver $R_n$ assez grand tel que

$$||\chi_{R_n} u - u||_p \leq \frac{1}{2n} \qquad \text{et} \qquad ||\chi_{R_n} u - u||_q \leq \frac{1}{2n}. \tag{2.2}$$

D'après la Proposition 2.5, il existe une suite $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions $C_0^\infty$, supportées dans $B(0,R_n+1)$, qui approchent $\chi_R u$ dans $L^q$, ie

$$||\psi_j - \chi_{R_n} u||_q \to 0, \qquad j \to \infty.$$

Comme $\psi_j$ et $\chi_{R_n} u$ sont nulles à l'extérieur de $B(0,R_n+1)$, on a aussi (par inégalité de Hölder),

$$||\psi_j - \chi_{R_n} u||_p \leq \lambda(B(0,R_n+1))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} ||\psi_j - \chi_{R_n} u||_q \to 0, \qquad j \to \infty.$$

Ainsi, pour chaque $n$, on peut trouver $j_n$ tel que

$$||\psi_{j_n} - \chi_{R_n} u||_p \leq \frac{1}{2n} \qquad \text{et} \qquad ||\psi_{j_n} \chi_{R_n} u||_q \leq \frac{1}{2n}. \tag{2.3}$$

En prenant, $\varphi_n = \psi_{j_n}$, (2.2) et (2.3) donnent le résultat. □

# 3 Convolution et espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$

Commençons par le cas le plus simple. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\int |f(y)g(x-y)|dy \leq ||f||_\infty \int |g(x-y)|dy = ||f||_\infty ||g||_1,$$

via le changement de variable $y' = x - y$ pour l'égalité finale. Ceci prouve que

1. la fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est intégrable pour tout $x$,
2. la fonction $x \mapsto \int f(y)g(x-y)dy$ est bornée.

En admettant temporairement la mesurabilité de $x \mapsto \int f(y)g(x-y)dy$ (voir la fin de la preuve du Théorème 3.1), tout ceci montre que si on définit

$$f * g(x) = \int f(y)g(x-y)dy, \tag{3.1}$$

on a $f * g \in L^\infty$ et

$$||f * g||_\infty \leq ||f||_\infty ||g||_1.$$

Insistons sur le fait que (3.1) est une définition car, pour l'instant, on a uniquement défini la convolution entre deux fonctions $L^1$ ou entre une fonction $L^1$ et une fonction continue bornée. Mais naturellement, si $f \in L^1 \cap L^\infty$, il n'y a pas d'ambiguïté car les deux définitions coïncident : si on note (temporairement) $*_{L^1-L^1}$ la convolution de la Définition 1.2 et $*_{L^\infty-L^1}$ celle de (3.1), on a $f *_{L^1-L^1} g = f *_{L^\infty-L^1} g$ presque partout.

On peut ainsi convoluer une fonction $L^1$ et une fonction $L^1$ ou $L^\infty$. Plus généralement, on peut convoluer $L^1$ et $L^p$ :

**Théorème 3.1.** *Soient $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour presque tout $x$, $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est intégrable et la fonction*

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy,$$

*est dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. De plus*

$$||f * g||_p \leq ||f||_p ||g||_1. \tag{3.2}$$

*Démonstration.* On a vu les cas $p = 1, \infty$. On peut donc supposer $1 < p < \infty$. Notons $q$ l'exposant conjugué, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. L'idée est d'utiliser l'inégalité de Hölder astucieusement. À $x$ fixé, on écrit

$$\int |f(y)||g(x-y)|dy = \int \left( |f(y)||g(x-y)|^{\frac{1}{p}} \right) |g(x-y)|^{\frac{1}{q}} dy,$$

où les intégrales, éventuellement infinies, ont un sens comme intégrales de fonctions positives mesurables. L'inégalité de Hölder nous donne

$$\begin{aligned}
\int |f(y)||g(x-y)|dy &\leq \left( \int |f(y)|^p |g(x-y)|dy \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |g(x-y)|dy \right)^{1/q} \\
&\leq \left( \int |f(y)|^p |g(x-y)|dy \right)^{\frac{1}{p}} ||g||_1^{1/q},
\end{aligned}$$

puisque le dernier facteur à droite se calcule par changement de variable $y' = x - y$. Pour ne pas mélanger les discours, admettons un instant que la fonction $x \mapsto \int |f(y)||g(x-y)|dy$ (qui est à valeurs dans $[0, +\infty]$) soit mesurable. Alors

$$\int \left( \int |f(y)||g(x-y)|dy \right)^p dx \leq ||g||_1^{\frac{p}{q}} \int \left( \int |f(y)|^p |g(x-y)|dy \right) dx$$

qui nous donne,

$$\begin{aligned} \int \left( \int |f(y)||g(x-y)|dy \right)^p dx &\leq ||g||_1^{\frac{p}{q}} |||f|^p * |g|||_1 \\ &\leq ||g||_1^{\frac{p}{q}+1} |||f|^p||_1 = ||g||_1^p ||f||_p^p, \end{aligned} \tag{3.3}$$

ce qui, modulo la question de la mesurabilité (en $x$) de $\int f(y)g(x-y)dy$ et $\int |f(y)||g(x-y)|dy$, donne le résultat comme dans le Théorème 1.1.

Vérifions ces mesurabilités (la preuve ci-dessous fonctionne aussi pour $p = \infty$). On considère d'abord $\int |f(y)g(x-y)|dy$. Soit $\chi_n$ la fonction caractéristique de $B(0,n)$. Pour chaque $n$, $\chi_n f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, donc d'après le Théorème 1.1, il existe une fonction $h_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ mesurable et un ensemble négligeable $N_n$ tel que $h_n(x) = \int |(\chi_n f)(y)g(x-y)|dy$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \backslash N_n$. Posons $N = \cup_n N_n$ qui est encore mesurable et négligeable. Le théorème de convergence monotone montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \backslash N$, $\int |(\chi_n f)(y)g(x-y)|dy \to \int |f(y)g(x-y)|dy$. Autrement dit, $\int |f(y)g(x-y)|dy$ coïncide sur $\mathbb{R}^d \setminus N$ avec la limite simple des fonctions mesurables $\chi_{\mathbb{R}^d \backslash N} h_n$ donc est mesurable (et à valeurs dans $[0, +\infty]$). Puis, l'inégalité (3.3) implique que $\int |f(y)g(x-y)|dy$ est finie pour presque tout $x$. Pour ces $x$, le théorème de convergence dominée montre que $\int f(y)g(x-y)dy = \lim_{n\to\infty} \int (\chi_n f)(y)g(x-y)dy$ ce qui montre par le même raisonnement que ci-dessus que $x \mapsto \int f(y)g(x-y)dy$ est définie pour presque tout $x$ et coïncide presque partout avec une fonction mesurable. □

**Proposition 3.2.** *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'identité. Alors, pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,*

$$||f * \rho_n - f||_p \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Prendre bien garde qu'on interdit $p = +\infty$ dans cette proposition.

*Démonstration.* Elle est complètement analogue à celle du Théorème 1.5, en utilisant (3.2) à la place de (1.1). On rappelle donc juste les grandes lignes. Par densité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, on peut trouver, pour tout $\epsilon > 0$, $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $||\varphi - f||_p < \epsilon$. En utilisant (3.2), cela nous donne

$$\begin{aligned} ||f * \rho_n - f||_p &= ||(f-\varphi) * \rho_n + (\varphi * \rho_n - \varphi) - (f - \varphi)||_p \\ &\leq ||(f-\varphi) * \rho_n||_p + ||\varphi * \rho_n - \varphi||_p + ||f - \varphi||_p \\ &\leq C\epsilon + ||\varphi * \rho_n - \varphi||_p, \qquad n \geq 0, \end{aligned}$$

où $C = 1 + \sup_n ||\rho_n||_1$. Il suffit donc de montrer que $||\varphi * \rho_n - \varphi||_p \to 0$. Si on pose $\tilde{\rho}_n = \chi \rho_n$, où $\chi$ est la fonction caractéristique de $B(0,1)$, on a $||\rho_n - \tilde{\rho}_n||_1 \to 0$, donc $||\varphi * \tilde{\rho}_n - \varphi * \rho_n||_p \to 0$ d'après (3.2). Il suffit donc de montrer que $||\varphi * \tilde{\rho}_n - \varphi||_p \to 0$. C'est une conséquence de la convergence uniforme de $\varphi * \tilde{\rho}_n$ vers $\varphi$ et du fait que les fonctions $\varphi * \tilde{\rho}_n$ sont supportées dans un compact indépendant de $n$. Cette propriété de support montre, via l'inégalité de Hölder, que convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. D'où le résultat. □

# A Exercices

**Exercice 1.** *Montrer qu'il existe une fonction* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *non identiquement nulle.*

**Exercice 2.** *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert et* $p \in [1, +\infty[$. *Montrer que* $C_0^\infty(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$.

**Exercice 3.** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert. Soient* $p \in ]1, +\infty[$ *et* $q$ *son exposant conjugué. Montrer que pour toute* $f \in L^p(\Omega)$,

$$||f||_p = \sup_{\substack{||\varphi||_q = 1, \\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)}} |\int_\Omega f\varphi|.$$

**Remarque.** Cette borne supérieure n'est pas un plus grand élément en général.

**Exercice 4** (Formes linéaires continues sur $L^p(\mathbb{R}^d)$)**.** *Soit* $\Phi$ *une forme linéaire continue sur* $L^p(\mathbb{R}^d)$, *avec* $1 < p < \infty$. *Soit* $q \in ]1, \infty[$ *l'exposant conjugué de* $p$. *Montrer qu'il existe une unique* $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ *telle que,*

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} fg \; dx,$$

*pour toute* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

**Exercice 5.** *Soit* $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. *On note par* $*g$ *l'endomorphisme de* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *défini par* $f \mapsto f * g$. *Vérifier qu'il est continu et que*

$$|| * g||_{1 \to 1} = ||g||_1,$$

*où* $|| \cdot ||_{1 \to 1}$ *désigne la norme d'opérateurs sur* $L^1(\mathbb{R}^d)$.

**Exercice 6.** *Pour tout* $t > 0$, *on note*

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \exp(-\frac{x^2}{4t}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

*Soit* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *avec* $p \in [1, \infty[$. *Montrer que*

$$u(t) = G_t * f,$$

*est solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale* $f$, *ie que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \text{sur } \; ]0, +\infty[_t \times \mathbb{R}_x,$$

*et*

$$\lim_{t \to 0} u(t) = f, \qquad \text{dans } L^p(\mathbb{R}).$$

**Exercice 7.** *Montrer qu'on peut définir* $f * g$ *pour toutes* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *et que le résultat est une fonction continue de limite nulle à l'infini.*