# Transformation de Fourier

## 1 Transformée de Fourier sur $L^1$

**Définition 1.1.** *La transformée de Fourier de $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est*

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(x) dx,$$

*où $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_d\xi_d$ pour $x, \xi \in \mathbb{R}^d$. L'application $u \mapsto \hat{u}$ s'appelle la transformation de Fourier.*

**Remarque.** Il est trivial mais utile de noter que

$$\hat{u}(0) = \int u \; dx.$$

**Théorème 1.2.** *La transformation de Fourier est linéaire de $L^1(\mathbb{R}^d)$ vers $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et*

$$||\hat{u}||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq ||u||_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.1}$$

*De plus, pour toute $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.*

*Démonstration.* La linéarité est claire et (1.1) suit directement de l'inégalité triangulaire. La continuité de $\hat{u}$ est conséquence du théorème de convergence dominée puisque, si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\xi \mapsto e^{-ix\cdot\xi}u(x)$ est continue pour presque chaque $x$ et est bornée en module indépendamment de $\xi$ par $|u(x)|$ qui est intégrable. □

**Notations.** Pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on définit l'opérateur de translation $\tau_{x_0}$ par

$$\tau_{x_0}u(x) = u(x - x_0),$$

ainsi que l'opérateur $\check{}$ par

$$\check{u}(x) = u(-x),$$

pour $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Pour $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$e_{\xi_0}(x) = e^{-ix\cdot\xi_0}.$$

Enfin, pour $\lambda > 0$, on note $D_\lambda$ l'opérateur de dilatation

$$D_\lambda u(x) = u\left(\lambda x\right),$$

encore pour $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Ces notations permettent d'exprimer quelques propriétés de la transformation de Fourier.

**Proposition 1.3.** *Pour toutes $u, v \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et tous $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^d$, on a les relations*

$$\widehat{u * v} = \hat{u}\hat{v}, \tag{1.2}$$

$$\int \hat{u} v \, dx = \int u \hat{v} \, dx, \tag{1.3}$$

$$\widehat{\tau_{x_0} u} = e_{x_0} \hat{u}, \tag{1.4}$$

$$\widehat{e_{\xi_0} u} = \tau_{-\xi_0} \hat{u}, \tag{1.5}$$

$$\hat{\check{u}} = \check{\hat{u}}, \tag{1.6}$$

$$\widehat{D_\lambda u} = \lambda^{-d} D_{\lambda^{-1}} \hat{u}. \tag{1.7}$$

Plus explicitement, dans (1.4) $(e_{x_0}\hat{u})(\xi) = e^{-ix_0\cdot\xi}\hat{u}(\xi)$ et dans (1.5) $(\tau_{-\xi_0}\hat{u})(\xi) = \hat{u}(\xi + \xi_0)$.

*Démonstration.* Pour (1.2), il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \widehat{u * v}(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi} \left( \int u(y) v(x-y) dy \right) dx \\ &= \int \int e^{-iy\cdot\xi} u(y) e^{-i(x-y)\cdot\xi} v(x-y) dy dx \\ &= \int \int e^{-iy\cdot\xi} u(y) e^{-iz\cdot\xi} v(z) dy dz = \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi) \end{aligned}$$

où la deuxième ligne est obtenue par théorème de Fubini et $x = y + x - y$, puis la troisième par le changement de variable $x = z + y$ et à nouveau le théorème de Fubini pour la dernière égalité. L'identité (1.3) s'obtient similairement

$$\begin{aligned} \int \hat{u}(\xi) v(\xi) d\xi &= \int \left( \int e^{-ix\cdot\xi} u(x) dx \right) v(\xi) d\xi \\ &= \int \int e^{-ix\cdot\xi} u(x) v(\xi) dx d\xi \\ &= \int u(x) \left( \int e^{-ix\cdot\xi} v(\xi) d\xi \right) dx \\ &= \int u(x) \hat{v}(x) dx, \end{aligned}$$

par théorème de Fubini puisque $(x, \xi) \mapsto u(x)v(\xi)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Pour (1.4), on écrit

$$\widehat{\tau_{x_0} u}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(x - x_0) dx = \int e^{-i(y+x_0)\cdot\xi} u(y) dy = e^{-ix_0\cdot\xi} \hat{u}(\xi)$$

par le changement de variable $x = y + x_0$. La preuve de (1.5) est analogue. On obtient (1.6) en écrivant

$$\check{\hat{u}}(\xi) = \hat{u}(-\xi) = \int e^{ix\cdot\xi} u(x) dx = \int e^{-iy\cdot\xi} u(-y) dy = \hat{\check{u}}(\xi)$$

par le changement de variable $x = -y$. Enfin, (1.7) suit du changement de variable $x = y/\lambda$, ie

$$\widehat{D_\lambda u}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(\lambda x) dx = \lambda^{-d} \int e^{-iy\cdot\xi/\lambda} u(y) dy = \lambda^{-d} D_{\lambda^{-1}} \hat{u}(\xi). \qquad \square$$

La Proposition 1.3 est valable pour des fonctions quelconques de $L^1(\mathbb{R}^d)$. Si on considère des fonctions ayant plus de propriétés de décroissance ou de régularité, on obtient les formules supplémentaires suivantes.

**Proposition 1.4.** *i) Si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $|x|u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{u} \in C^1(\mathbb{R}^d)$ et*

$$i\partial_{\xi_j}\hat{u} \quad = \quad \widehat{x_j u}, \qquad 1 \leq j \leq d. \tag{1.8}$$

*ii) Si $u \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^1(\mathbb{R}^d)$ et $\nabla u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ (ie $\partial_{x_j} u \in L^1$ pour tout $j$), on a*

$$i\xi_j \hat{u} \quad = \quad \widehat{\partial_{x_j} u}, \qquad 1 \leq j \leq d. \tag{1.9}$$

*En particulier, $|\xi|\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Rappelons que la notation $|x|$ correspond à la norme euclidienne usuelle, ie

$$|x| = \left(x_1^2 + \cdots + x_d^2\right)^{1/2}. \tag{1.10}$$

La preuve de la Proposition 1.4 utilise notamment des intégrations par parties, dont la version multi-dimensionnelle est donnée dans le lemme suivant.

**Lemme 1.5.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions $C^1$ sur $\mathbb{R}^d$, l'une étant à support compact. Pour tout $1 \leq j \leq d$, on a*

$$\int (\partial_{x_j} f) g \; dx = - \int f(\partial_{x_j} g) \; dx.$$

*Démonstration.* Pour fixer les idées on suppose $j = 1$. Comme on intègre une fonction continue à support compact donc intégrable, on peut utiliser le théorème de Fubini et on a

$$-\int_{\mathbb{R}^d} f(\partial_{x_1} g) dx = -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2, \ldots, x_d) \partial_{x_1} g(x_1, x_2, \ldots, x_d) dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_d. \tag{1.11}$$

Par intégration par partie usuelle (sur un intervalle compact), la parenthèse (ie l'intégrale en $x_1$) vaut, à $x_2, \ldots, x_d$ fixés,

$$-[f(., x_2, \ldots, x_d) g(., x_2, \ldots, x_d)]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} (\; \partial_{x_1} f)(x_1, x_2, \ldots, x_d) g(x_1, x_2, \ldots, x_d) dx_1,$$

où le crochet est nul car $fg$ est à support compact. Il ne nous reste donc que

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_{x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_d) g(x_1, x_2, \ldots, x_d) dx_1.$$

En substituant cette dernière intégrale à la parenthèse de (1.11) et en utilisant à nouveau le théorème de Fubini, on obtient le résultat annoncé. $\square$

*Démonstration de la Proposition 1.4. i)* C'est une conséquence directe du théorème de dérivation sous le signe $\int$ puisque pour presque tout $x$

$$\partial_{\xi_j} e^{-ix\cdot\xi} u(x) = -ix_j e^{-ix\cdot\xi} u(x),$$

et

$$|x_j u(x)| \leq ||x|u(x)|$$

qui est intégrable et indépendant de $\xi$. Ainsi $\hat{u}$ a des dérivées partielles d'ordre 1, qui vérifient (1.8) et celles-ci sont continues sur $\mathbb{R}^d$ puisque transformées de Fourier de fonctions $L^1$.

*ii)* Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de 0 et posons $\chi_n(x) := \chi(x/n)$. Par intégration par partie (ie le Lemme 1.5), on a

$$\begin{aligned} \xi_j \widehat{\chi_n u}(\xi) &= \int (i\partial_{x_j} e^{-ix\cdot\xi}) \chi_n(x) u(x) dx \\ &= -i \int e^{-ix\cdot\xi} \partial_{x_j}(\chi_n(x)u(x)) = -i\widehat{\chi_n \partial_{x_j}} u(\xi) - iu\widehat{\partial_{x_j}\chi_n}(\xi). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Comme $\chi_n(x) \to 1$ lorsque $n \to \infty$ et $|\chi_n(x)| \leq ||\chi||_{L^\infty}$, le théorème de convergence dominée montre que

$$||\chi_n u - u||_{L^1} \to 0 \qquad \text{et} \qquad ||\chi_n \partial_{x_j} u - \partial_{x_j} u||_{L^1} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Encore plus simplement, comme $||\partial_{x_j}\chi_n||_{L^\infty} \leq ||\partial_{x_j}\chi||_{L^\infty}/n$, on a $u\partial_{x_j}\chi_n \to 0$ dans $L^1$. On peut donc passer à la limite dans les termes extrêmes de (1.12) et on obtient

$$\xi_j \hat{u}(\xi) = -i\widehat{\partial_{x_j}} u(\xi)$$

qui est exactement (1.9). $\square$

Citons enfin le résultat suivant, usuellement appelé *Lemme de Riemann-Lebesgue.*

**Proposition 1.6** (Riemann-Lebesgue)**.** *Pour toute $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\hat{u}(\xi) \to 0 \qquad \textit{lorsque} \qquad \xi \to \infty.$$

*Démonstration.* Si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on peut utiliser la Proposition 1.4 (point *ii)*) : elle montre que $|\hat{u}(\xi)| \leq C/|\xi| \to 0$ lorsque $\xi \to \infty$. Pour $u$ quelconque dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, on utilise un argument de densité : à $\epsilon > 0$ fixé, il existe $u_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$||u - u_\epsilon||_{L^1} \leq \epsilon/2.$$

Puis, comme $\hat{u}_\epsilon(\xi) \to 0$ lorsque $\xi \to \infty$, il existe $R_\epsilon > 0$ tel que

$$|\hat{u}_\epsilon(\xi)| < \epsilon/2, \qquad |\xi| > R_\epsilon.$$

Mais alors, utilisant (1.1), nous avons pour tout $|\xi| > R_\epsilon$

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\xi)| &\leq |\hat{u}(\xi) - \hat{u}_\epsilon(\xi)| + |\hat{u}_\epsilon(\xi)| \\ &\leq ||\hat{u} - \hat{u}_\epsilon||_{L^\infty} + |\hat{u}_\epsilon(\xi)| \\ &\leq ||u - u_\epsilon||_{L^1} + |\hat{u}_\epsilon(\xi)| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

ce qui est exactement le résultat. $\square$

# 2 La formule d'inversion de Fourier

**Théorème 2.1.** *Supposons que $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors,*

$$\int e^{ix\cdot\xi} \hat{u}(\xi) d\xi = (2\pi)^d u(x), \qquad \textit{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

*Autrement dit,*

$$\check{\hat{u}} = (2\pi)^d u \qquad \textit{pp.}$$

*En particulier, la transformation de Fourier est injective sur $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

**Commentaire.** Si $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier $\hat{\hat{u}}$ est continue. Donc $\check{\hat{\hat{u}}}$ est continue et le Théorème 2.1 implique en particulier que $u$ a un représentant [1] continu. Mais si on suppose dès le début que $u$ est continue, il y a égalité partout (au lieu de presque partout) entre $\check{\hat{\hat{u}}}$ et $(2\pi)^d u$ puisque deux fonctions continues qui coïncident presque partout sont égales.

Pour démontrer le Théorème 2.1, on utilise le lemme suivant.

**Lemme 2.2.** *Posons*

$$G(x) = \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

*Alors*

$$\widehat{G}(\xi) = (2\pi)^{d/2} G(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Autrement dit, et de façon formelle, la fonction $G$ est un "vecteur propre" pour la transformation de Fourier (qui, attention, n'est toutefois pas un <u>endo</u>morphsime de $L^1(\mathbb{R}^d)$).

*Démonstration.* Par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} e^{-|x|^2/2} dx &= \int e^{-ix_1\xi_d} e^{-x_1^2/2} \cdots e^{-ix_d\xi_d} e^{-\xi_d^2/2} dx_1 \cdots d\xi_d \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1\xi_1} e^{-x_1^2/2} dx_1\right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_d\xi_d} e^{-x_d^2/2} dx_d\right) \qquad (2.1)\end{aligned}$$

ce qui nous ramène au cas où $d = 1$. Posons

$$g(\xi_j) = \int e^{-ix_j\xi_j} e^{-x_j^2/2} dx_j.$$

Dans ce cas, un calcul immédiat donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi_j} g(\xi_j) = -i \int x_j e^{-ix_j\xi_j} e^{-x_j^2/2} dx_j &= i \int e^{-ix_j\xi_j} \partial_{x_j} e^{-x_j^2/2} dx_j \\ &= -i \int (\partial_{x_j} e^{-ix_j\xi_j}) e^{-x_j^2/2} dx_j = -\xi_j g(\xi_j)\end{aligned}$$

en intégrant par partie pour passer à la seconde ligne. En intégrant l'équation différentielle ainsi obtenue, on trouve

$$g(\xi_j) = g(0) \exp\left(-\frac{\xi_j^2}{2}\right).$$

On vérifie aisément que $g(0) = (2\pi)^{1/2}$, à partir du changement de variable $t = x_j/\sqrt{2}$ dans l'intégrale classique

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \qquad (2.2)$$

On obtient ainsi le résultat pour $d = 1$. Pour $d$ quelconque, on conclut en utilisant (2.1). $\square$

1. ne pas perdre de vue que les éléments de $L^1(\mathbb{R}^d)$ sont des classes d'équivalence ni l'abus de langage usuel consistant à confondre $u$ et un de ses représentants

*Démonstration du Théorème 2.1.* Par théorème de convergence dominée, on vérifie aisément que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\check{\hat{u}}(x) = \lim_{n \to +\infty} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) G(\xi/n) d\xi. \tag{2.3}$$

Par ailleurs, l'intégrale à droite de (2.3) se réécrit

$$\begin{aligned} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) G(\xi/n) d\xi &= \int e^{ix \cdot \xi} \left( \int e^{-iy \cdot \xi} u(y) dy \right) G(\xi/n) d\xi \\ &= \int \left( \int e^{i(x-y) \cdot \xi} G(\xi/n) d\xi \right) u(y) dy \\ &= (2\pi)^{d/2} \int n^d G\left(n(x-y)\right) u(y) dy, \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini pour la deuxième ligne, puis (1.7) appliquée à $G$ avec $\lambda = n$ et le Lemme 2.2 pour la troisième (ainsi que la parité de $G$). Autrement dit, en posant

$$G_n(x) = (2\pi)^{-d/2} n^d G(nx),$$

on a

$$\int e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) G(\xi/n) d\xi = (2\pi)^d \left(G_n * u\right)(x). \tag{2.4}$$

Comme $G_1$ est intégrable, positive et d'intégrale 1, $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'identité donc

$$||G_n * u - u||_{L^1} \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{2.5}$$

ce qui implique l'existence d'une sous-suite $n_k$ telle que

$$G_{n_k} * u \to u \qquad \text{pp},$$

lorsque $k \to \infty$. En passant à la sous-suite $n_k$ dans (2.3) et (2.4), on obtient le résultat. $\square$

**Remarque.** C'est un bon exercice de refaire cette preuve en supposant en plus $u$ continue (c'est alors plus simple car on n'a pas besoin d'utiliser (2.5)).

# 3 Transformée de Fourier sur l'espace de Schwartz

L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (dont on rappelle la définition ci-dessous) est un espace très commode : toutes les propriétés données dans la section précédente sont vérifiées et, surtout, la transformation de Fourier agit bijectivement de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui même. Cette section est essentiellement motivée par la vérification de ce point.

**Notations.** Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ (on dit que c'est un mutli-indice) et si $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} \in \mathbb{R},$$

avec la convention que $0^0 = 1$. On vérifie que

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}.$$

La *longueur* de $\alpha$ est l'entier
$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d.$$
(Attention cette notation, usuelle, n'est pas compatible avec (1.10)). On note également
$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!.$$
Pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, on note
$$\partial^\alpha f := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} f = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots \alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$
Cette notation est légitime d'après le lemme de Schwarz. Là aussi,
$$\partial^\alpha \partial^\beta f = \partial^{\alpha+\beta} f,$$
(ie $\partial^\alpha(\partial^\beta f) = \partial^{\alpha+\beta} f$).

**Définition 3.1.** *On dit que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si $\varphi$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ et si, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, $x^\alpha \partial^\beta \varphi$ est bornée sur $\mathbb{R}^d$, ie*
$$||x^\alpha \partial^\beta \varphi||_{L^\infty} < +\infty.$$
*L'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ s'appelle l'espace de Schwartz.*

**Proposition 3.2.** *Pour tout $q \in [1, \infty]$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément, il existe $C_q > 0$ telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,*
$$||\varphi||_{L^q} \le C_q \max_{|\alpha| \le d+1} ||x^\alpha \varphi||_{L^\infty}. \tag{3.1}$$
*De plus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^q(\mathbb{R}^d)$ pour tout $q \in [1, \infty[$.*

*Démonstration.* Pour (3.1), tout provient du fait que
$$(1 + |x|)^{-d-1} \in L^q(\mathbb{R}^d), \qquad (1 + |x|)^{d+1} |\varphi(x)| \le C \max_{|\alpha| \le d+1} ||x^\alpha \varphi||_{L^\infty}.$$
Pour prouver la seconde inégalité, on utilise que
$$|x| \le |x_1| + \cdots + |x_d|, \tag{3.2}$$
qui, par une récurrence élémentaire sur $k$, donne
$$|x|^k \le \sum_{\substack{n_1 + \cdots + n_d = k \\ n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}}} c_{k n_1 \cdots n_d} |x_1|^{n_1} \cdots |x_d|^{n_d} = \sum_{|\alpha| = k, \ \alpha \in \mathbb{N}^d} c_{k \alpha_1 \cdots \alpha_d} |x^\alpha| \tag{3.3}$$
avec des coefficients $c_{k\alpha_1 \cdots \alpha_d} \ge 0$. La densité est une conséquence immédiate de la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^q(\mathbb{R}^d)$ pour $q \in [1, \infty[$. $\square$

**Proposition 3.3.** *Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, alors $x^\alpha \partial^\beta \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

*Démonstration.* Par formule de Leibniz, on a

$$\partial^\gamma\left(x^\alpha\partial^\beta\varphi\right)=\sum_{\mu+\nu=\gamma}\frac{\gamma!}{\mu!\nu!}\partial^\mu x^\alpha\partial^{\beta+\nu}\varphi,$$

(se ramener au cas 1D en écrivant $\sum_{\mu+\nu=\gamma}=\sum_{\mu_1+\gamma_1''=\gamma_1}\cdots\sum_{\mu_d+\gamma_d''=\gamma_d}$). Si pour un $j$ on a $\mu_j>\alpha_j$, alors $\partial^\mu x^\alpha=0$ (car $\partial_{x_j}^{\mu_j}x_j^{\alpha_j}=0$). Sinon

$$\begin{aligned}\partial^\mu x^\alpha &= \partial_{x_1}^{\mu_1}x_1^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_d}^{\mu_d}x_d^{\alpha_d}\\ &= \left(\frac{\alpha_1!}{(\alpha_1-\mu_1)!}x_1^{\alpha_1-\mu_1}\right)\cdots\left(\frac{\alpha_d!}{(\alpha_d-\mu_d)!}x_d^{\alpha_d-\mu_d}\right)=\frac{\alpha!}{(\alpha-\mu)!}x^{\alpha-\mu}.\end{aligned}$$

La conclusion (facile) est laissée à titre d'exercice. □

**Théorème 3.4.** *La transformation de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même (la réciproque est donnée par la formule d'inversion de Fourier).*

*Démonstration.* Comme $x_j\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ d'après la Proposition 3.3, $x_j\varphi\in L^1(\mathbb{R}^d)$ d'après la Proposition 3.2. Comme ceci est vrai pour tout $j$, (3.2) montre que $|x|\varphi\in L^1$. Bien sûr on a aussi $\varphi\in L^1$ d'après la Proposition 3.2, donc la Proposition 1.4 (point *i)*) montre que $\hat\varphi$ est $C^1$ et que (1.8) a lieu. De même, à $j$ fixé, on peut appliquer le même raisonnement à $x_j\varphi$ qui est de Schwartz et dont la transformée de Fourier est à son tour $C^1$ et vérifie

$$i^2\partial_{\xi_k}\partial_{\xi_j}\hat\varphi=\widehat{x_kx_j\varphi},\qquad 1\le k\le d.$$

Par itération, on obtient ainsi que $\hat\varphi\in C^\infty$ et que, pour tout $\beta\in\mathbb{N}^d$,

$$\partial_\xi^\beta\hat\varphi=i^{-|\beta|}\widehat{x^\beta\varphi}.$$

Utilisant à présent que $x^\beta\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\subset L^1(\mathbb{R}^d)\cap C^1(\mathbb{R}^d)$ et que $\partial_{x_j}(x^\beta\varphi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\cap L^1(\mathbb{R}^d)$ d'après les Proposition 3.3 et 3.2, on peut utiliser la Proposition 1.4 (point *ii)*) qui montre que

$$i\xi_j\partial_\xi^\beta\hat\varphi=i^{-|\beta|}\widehat{\partial_{x_j}(x^\beta\varphi)}.$$

Plus généralement, une itération de cet argument montre que pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^d$,

$$\xi^\alpha\partial_\xi^\beta\hat\varphi=i^{-|\alpha+\beta|}\widehat{\partial_x^\alpha(x^\beta\varphi)}.$$

Comme $\partial_x^\alpha(x^\beta\varphi)$ est de Schwartz (Proposition 3.3) donc intégrable (Proposition 3.2 avec $q=1$), $\xi^\alpha\partial_\xi^\beta\hat\varphi$ est bornée (d'après 1.1). Ainsi $\widehat{\varphi}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En particulier, on peut utiliser la formule d'inversion (qui est valable partout car $\varphi$ est continue). Cela prouve la surjectivité de la transformée de Fourier puisque toute $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ s'écrit $\varphi(x)=\hat\psi(x)$ avec

$$\psi(\xi)=(2\pi)^{-d}\check{\hat\varphi}(\xi)$$

qui est clairement une fonction de Schwartz. □

**Complément.** Dans cette courte section, nous avons vu des propriétés *algébriques* de l'espace de Schwartz et de la transformée de Fourier. On peut mettre une topologie "naturelle" sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour laquelle les opérations considérées ici (injection dans les espaces de Lebesgue, dérivations, multiplication par des polynômes et, surtout, transformation de Fourier) deviennent *continues*. Cette topologie n'est pas donnée par une norme mais par une distance ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ n'est alors pas un evn mais un evt) pour laquelle $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est complet (on dit que c'est un espace de Fréchet).

# 4 Transformée de Fourier sur $L^2$

**Théorème 4.1.** *L'application*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto \hat{\varphi}$$

*se prolonge (de manière unique) en une application linéaire continue $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus $(2\pi)^{-d/2}\mathcal{F}$ est unitaire.*

*Démonstration.* Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int \overline{\hat{\psi}(x)}\varphi(x)dx = \int \hat{\bar{\psi}}(-x)\varphi(x)dx = \int \bar{\psi}(\xi)\hat{\varphi}(-\xi)d\xi, \tag{4.1}$$

et

$$||\hat{\varphi}||_{L^2}^2 = \int \overline{\hat{\varphi}(\xi)}\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \int \hat{\bar{\varphi}}(-\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi = (2\pi)^d \int \bar{\varphi}(x)\varphi(x)dx = (2\pi)^d ||\varphi||_{L^2}^2,$$

en utilisant (1.3), la commutativité de $\hat{}$ et de $\check{}$ et le fait que $\check{\hat{\bar{\hat{\varphi}}}} = (2\pi)^d \bar{\varphi}$. La deuxième chaîne d'égalités montre que $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ se prolonge en une application linéaire continue $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$||\mathcal{F}u||_{L^2} = (2\pi)^{d/2}||u||_{L^2}, \qquad u \in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{4.2}$$

Comme la transformée de Fourier est une bijection sur l'espace de Schwartz, $\mathcal{F}\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ contient $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui est dense. Par ailleurs (4.2) implique que l'image de $\mathcal{F}$ est fermée, donc $\mathcal{F}$ est surjective (et clairement injective par (4.2)). $\mathcal{F}$ est ainsi bijective. De (4.1), on déduit que

$$\mathcal{F}^*\varphi = \check{\hat{\bar{\varphi}}},$$

ce qui implique que $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = (2\pi)^d I$ sur l'espace de Schwartz puis sur $L^2$ par densité. Cela implique que $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-d}\mathcal{F}^*$ et montre l'unitarité de $(2\pi)^{-d/2}\mathcal{F}$. □

**Définition 4.2.** *L'application $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Notons que la définition de $\mathcal{F}$, obtenue par densité, est abstraite. De plus, pour une fonction quelconque $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, l'expression

$$\int e^{-ix\cdot\xi}u(x)dx$$

n'a pas de sens. Elle a seulement un sens si $u \in L^2 \cap L^1$. Cela dit, même si $u \in L^1 \cap L^2$, il n'est pas clair a priori que la fonction ainsi obtenue soit $\mathcal{F}u$. La proposition suivante dit que c'est bien le cas, ie que les Définitions 1.1 et 4.2 coïncident sur $L^1 \cap L^2$.

**Proposition 4.3.** *Pour toute $u \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\hat{u}(x) = \mathcal{F}u(x), \qquad \textit{pour presque tout } x.$$

*Démonstration.* Si $u \in L^1 \cap L^2$, on peut trouver une suite $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$||\varphi_n - u||_{L^1} \to 0 \qquad \text{et} \qquad ||\varphi_n - u||_{L^2} \to 0, \tag{4.3}$$

lorsque $n \to +\infty$ (voir les Notes sur la Convolution). La deuxième convergence implique que

$$||\mathcal{F}\varphi_n - \mathcal{F}u||_{L^2} \to 0,$$

ce qui implique l'existence d'une sous suite $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\mathcal{F}\varphi_{n_k}(x) \to \mathcal{F}u(x), \qquad \text{pour presque tout } x.$$

D'un autre côté la première convergence de (4.3) montre que

$$\mathcal{F}\varphi_n(x) = \hat{\varphi}_n(x) \to \hat{u}(x), \qquad \text{pour tout } x,$$

ce qui reste bien sûr vrai par passage à la sous suite. On en déduit donc que $\mathcal{F}u$ et $\hat{u}$ coïncident presque partout. □

**Proposition 4.4.** *Pour toutes $u, v \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\int (\mathcal{F}u)v = \int u(\mathcal{F}v). \tag{4.4}$$

*Démonstration.* On sait que l'identité (4.4) est vraie si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ d'après (1.3). Le résultat s'obtient donc par densité puisque les deux membres de (4.4) dépendent continûment de $u$ et $v$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

# A Exercices

**Exercice 1.** *Calculer les transformées de Fourier (sur $\mathbb{R}$) de*

$$e^{-|x|}, \qquad \chi_{\mathbb{R}^+}(x)e^{-x}, \qquad \chi_{[-1,1]}.$$

**Exercice 2.** *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $\alpha$-Höldérienne, avec $\alpha \in ]0, 1]$, si il existe $C_f$ telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq C_f |x - y|^\alpha.$$

*On note $C_0^\alpha(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $\alpha$-Höldériennes à support compact et on note*

$$||f||_\alpha = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{\substack{x\neq y,\\ x,y\in\mathbb{R}}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

*1) Soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int \rho = 1$. On pose $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\rho(x/\epsilon)$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que,*

$$\left|\frac{d}{dx} f * \rho_\epsilon(x)\right| \leq C||f||_\alpha \epsilon^{\alpha-1},$$

*pour tous $x \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ et toute $f \in C_0^\alpha(\mathbb{R})$.*
*2) Montrer que si $f \in C_0^\alpha(\mathbb{R})$, il existe $C > 0$ telle que*

$$|\hat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-\alpha},$$

*pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.*

Cet exercice donne un taux de décroissance explicite vers 0 pour $\hat{f}(\xi)$ lorsque $\xi \to \infty$, pour des fonctions höldériennes. Si $f$ est juste continue à support compact, on sait seulement que $\hat{f}(\xi) \to 0$. En revanche, si $f$ est $C^1$, on a $\hat{f}(\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^{-1})$ par intégrations par parties. Cet exercice montre que pour une régularité intermédiaire, entre $C^0$ et $C^1$, on a une décroissance intermédiaire.

**Exercice 3.** *Montrer que pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et tout $\lambda > 0$, on a*

$$\int e^{i\lambda \frac{x^2}{2}} f(x)dx = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{(2\pi\lambda)^{1/2}} \int e^{-i\frac{\xi^2}{2\lambda}} \hat{f}(\xi)d\xi.$$

*En déduire l'existence d'un développement asymptotique, lorsque $\lambda \to +\infty$, de la forme*

$$\int e^{i\lambda \frac{x^2}{2}} f(x)dx \sim \sum_{k\geq 0} c_k(f)\lambda^{-k-\frac{1}{2}},$$

*avec des coefficients $c_k(f)$ qu'on déterminera.*