

Equations d'onde et variétés asymptotiquement Anti-de-Sitter

Jacques Smulevici (Université Paris-Sud)
en collaboration avec
Gustav Holzegel (Princeton University).

GDR Dynamique Quantique,
9 février 2012.

Résumé de cette présentation :

1. Quelques rappels de géométrie Lorentzienne.
2. Quelques rappels sur les équations d'Einstein.
3. Solutions explicites des équations d'Einstein : Anti-de-Sitter (AdS), Schwarzschild(-AdS), Kerr(-AdS).
4. Equations d'onde sur les variétés asymptotiquement Anti-de-Sitter.
5. Résultat 1 : Décroissance des ondes linéaires sur Schwarzschild-AdS, Kerr-AdS.
6. Résultat 2 : Stabilité non-linéaire de Schwarzschild-AdS pour le système Einstein-Klein-Gordon en symétrie sphérique.

Un peu de géométrie Lorentzienne I

- (\mathcal{M}, g) est une variété Lorentzienne de dim 4 si g est un $(0, 2)$ tenseur symétrique de signature $-1, 1, 1, 1$ (dim $\mathcal{M}=4$).
- Comme en géométrie Riemannienne, on peut associer à g , une unique connection de Levi-Civita : $\nabla g = 0$.
- A partir ∇ , on peut définir tous les objets standards : géodésique $\nabla_X X = 0$, courbure, tenseur de Ricci...

Un peu de géométrie Lorentzienne II

- Vecteur X est dit de type temps, espace, isotrope, si $g(X, X) < 0$, > 0 ou $= 0$.
- De la même façon : courbe, géodésique de type espace, temps ou isotrope.
- Hypersurface de type espace, temps ou isotrope : métrique induite est Riemannienne, Lorentzienne, dégénérée.

Un peu de géométrie Lorentzienne III

Pour X champ de vecteur, tenseur de déformation de X est :

$$2^{(X)}\pi_{ab} := \nabla_a X_b + \nabla_b X_a$$

Comme en géométrie Riemannienne, les champs de vecteur X satisfaisant (équation de Killing)

$${}^{(X)}\pi = 0$$

sont les générateurs d'isométries de g .

Ex : si T Killing, et $T = \partial_t$ pour des coordonnées (t, x^α) alors g est indépendante de t .

L'opérateur d'onde (=d'Alembertien) de g

$$\square_g \psi = g^{ab} \nabla_a \nabla_b \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a (\sqrt{-g} g^{ab} \partial_b \psi).$$

- Directions caractéristiques ξ de \square_g coïncident avec les vecteurs isotropes $g(\xi, \xi) = 0$.
- Champs de Killing commutent avec \square_g .

Les équations d'Einstein I

Pour une variété (\mathcal{M}, g) , les équations d'Einstein dans le vide (pas de source) sont

$$Ric(g) = \Lambda g,$$

où $Ric(g)$ est le tenseur de Ricci de g et Λ une constante.

Dans un système de coordonnées (locales) adaptées (coordonnées d'onde), équation d'Einstein se réduisent à :

$$\square_g g_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}(\partial g, \partial g) + \Lambda g_{\alpha\beta}.$$

- Equations d'onde quasi-linéaires
- $Q_{\alpha\beta}(\partial g, \partial g)$ forme quadratique dans les dérivées premières de g .
- invariance par changement d'échelle
- Avec 3 dim d'espace (i.e. $\dim \mathcal{M} = 4$), espace de Sobolev critique $H^{3/2}$, surcritique dans H^1 .
- Pour des données suffisamment régulières, le problème aux données initiales est bien posé localement.

Les équations d'Einstein III

Typiquement les données initiales sont données

- soit sur une variété compacte (ex : T^3)
- soit elles satisfont à des conditions asymptotiques à l'infini (ex : asymptotiquement plat).

Quelques solutions explicites des équations d'Einstein :

Solutions de $Ric(g) = \Lambda g$ ayant le degré maximal de symétrie :

- si $\Lambda = 0$, la métrique de Minkowski $g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.
- si $\Lambda > 0$, la métrique de l'espace de-Sitter.
- si $\Lambda < 0$, la métrique de l'espace anti-de-Sitter.

Anti-de-Sitter

Il s'agit de la variété \mathbb{R}^4 munie de la métrique :

$$g_{AdS} = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\sigma_{S^2},$$

où $d\sigma_{S^2}$ est la métrique standard sur S^2 et $l^2 = -\frac{3}{\Lambda}$.

(\mathcal{M}, g) **variété asymptotiquement Anti-de-Sitter** si g converge vers g_{AdS} lorsque $r \rightarrow \infty$.

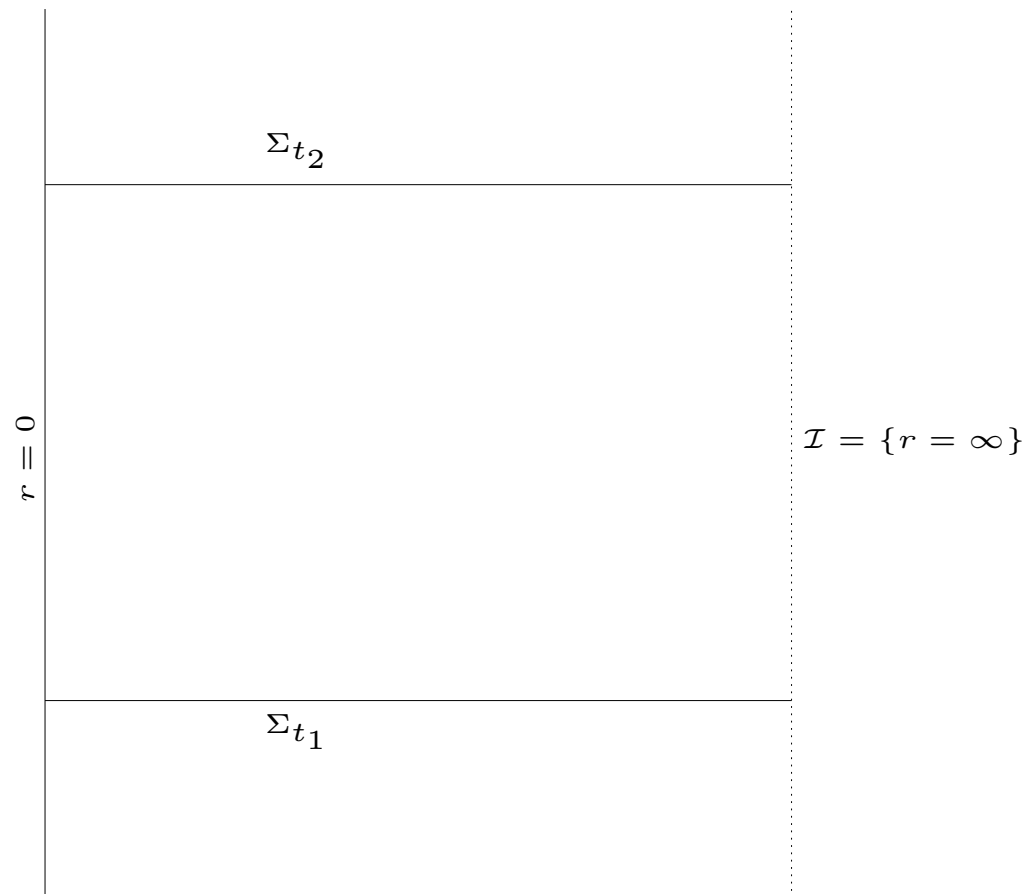
Stabilité non-linéaire des solutions

- L'espace de Minkowski est stable (Christodoulou-Klainerman, 1993).
- L'espace de de-Sitter est stable (Friedrich, 1986).
- Conjecture pour Anti-de-Sitter : instabilité (cf travaux numériques de Bizoń-Rostworowski).

Equations d'onde sur Anti-de-Sitter

- On considère l'équation $\square_g \psi = m\psi$ avec des données initiales appropriées, sur (asymptotiquement) Anti-de-Sitter.
- Pour rendre le problème bien posé, on doit travailler avec des espaces de fonctions imposant un comportement asymptotique en $r = \infty$ (cf Bachelot 2007).
- Ces conditions sont similaires à des conditions au bord de type Dirichlet ou Neumann.

- Si ψ à symétrie sphérique, $\square_g \psi = m\psi$ transforme en $(-u_{tt} + u_{xx} + V(x)) u = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \cap \{0 \leq x \leq 1\}$ avec V potentiel singulier en $x = 0$.
- Bord singulier à l' "infini" : schématiquement



Equations d'onde sur les variétés asymptotiquement AdS

Théorème 1 (Holzegel, 2009). *Pour toute variété asymptotiquement AdS, le problème aux données initiales pour $\square_g \psi = m\psi$ est bien posé dans H^2_{AdS} , si $m \geq -a^2$, où a est une constante dépendant uniquement de Λ .*

- H^2_{AdS} est un espace de Sobolev à poids, qui contrôle $\psi, \partial\psi, \partial\partial\psi$ et qui implique $r^{3/2}\psi \rightarrow 0$ à l'infini (condition de type Dirichlet).
- Autres résultats : Bachelot 2007 (méthode spectrale), Vasy (méthode compactification conforme)

La méthode des champs de vecteur

Tenseur d'énergie-impulsion de ψ , solution de $\square_g \psi = m\psi$:

$$T[\psi] = d\psi \otimes d\psi - \frac{1}{2}g (g(\nabla\psi, \nabla\psi) + m\psi^2).$$

Pour X , champ de vecteur, on définit :

$$\begin{aligned} J_\mu^X[\psi] &= T[\psi]_{\mu\nu} X^\nu, \\ K^X[\psi] &= \nabla^\mu J_\mu^X[\psi]. \end{aligned}$$

On a alors l'identité :

$$K^X[\psi] = T[\psi]_{\mu\nu} {}^{(X)}\pi^{\mu\nu}$$

et sous forme intégrale :

$$\int_{\Sigma_1} J_\mu^X[\psi] n_{\Sigma_1}^\mu = \int_{\Sigma_2} J_\mu^X[\psi] n_{\Sigma_2}^\mu + \int_{R(\Sigma_1, \Sigma_2)} T[\psi]_{\mu\nu} {}^{(X)}\pi^{\mu\nu}.$$

- Si X de type temps $T[\psi](X, X) \geq 0$ et contrôle toutes les dérivées de ψ .

$$\int_{\Sigma_1} J_\mu^X[\psi] n_{\Sigma_1}^\mu \sim \|\psi\|_{H^1}$$

- Multiplier estimate : Trouver X tel que

$$T[\psi]_{\mu\nu}^{(X)} \pi^{\mu\nu} \geq 0$$

et $\int_{\Sigma_1} J_\mu^X[\psi] n_{\Sigma_1}^\mu < \infty$.

- Multiplier estimate donne décroissance intégrée :

$$\int_{\mathcal{R}} T[\psi]_{\mu\nu}^{(X)} \pi^{\mu\nu} \simeq \int_{t_1}^{t_2} \|\psi\|_{\Sigma_t}(t) dt$$

Equations d'onde sur Anti-de-Sitter : Estimations d'énergie

- L'équation est $\square_g \psi = m\psi$, avec g métrique Anti-de-Sitter.
- $T = \partial_t$ est Killing. On obtient conservation de l'énergie ($l^2 = 1$, $\Sigma_t = \{t = \text{const}\}$) :

$$E(\psi) = \int_{\Sigma_t} [r^{-2}\psi_t^2 + r^2\psi_r^2 + |\nabla\psi|^2 + m\psi^2] r^2 dr d\omega.$$

- Les physiciens sont particulièrement intéressés dans le cas $m < 0$ ($m = -\frac{2}{l^2}$).
- Inégalités de Hardy à poids pour contrôler le dernier terme :

$$\int_{\Sigma_t} \psi^2 r^2 dr d\omega \leq C_P \int_{\Sigma_t} r^4 \psi_r^2 dr d\omega$$

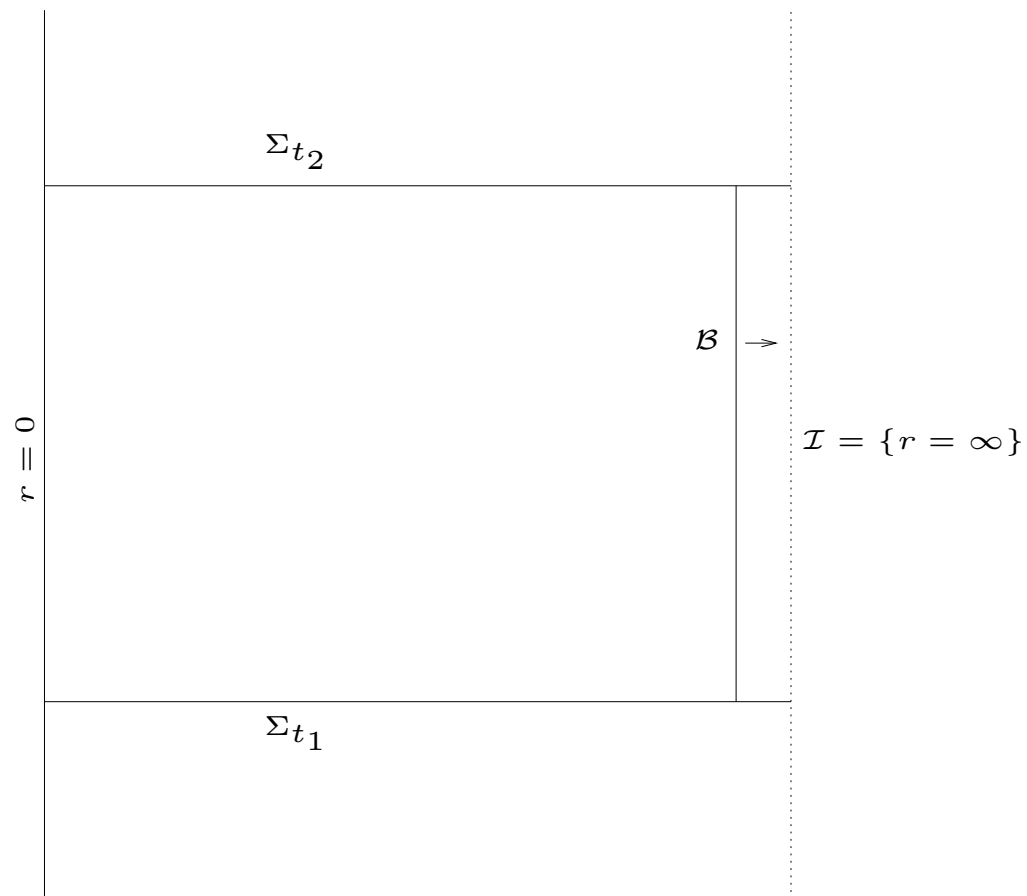
- La meilleure constante C_P fixe une borne inférieure sur m .

Espace de Sobolev à poids sur Anti-de-Sitter : Amélioration des poids

- Conservation de l'énergie $E(\psi)$ controle :

$$\|\psi\|_{H_{AdS}^1} = \int_{\Sigma_t} [r^{-2}\psi_t^2 + r^2\psi_r^2 + |\nabla\psi|^2 + \psi^2] r^2 dr d\omega.$$

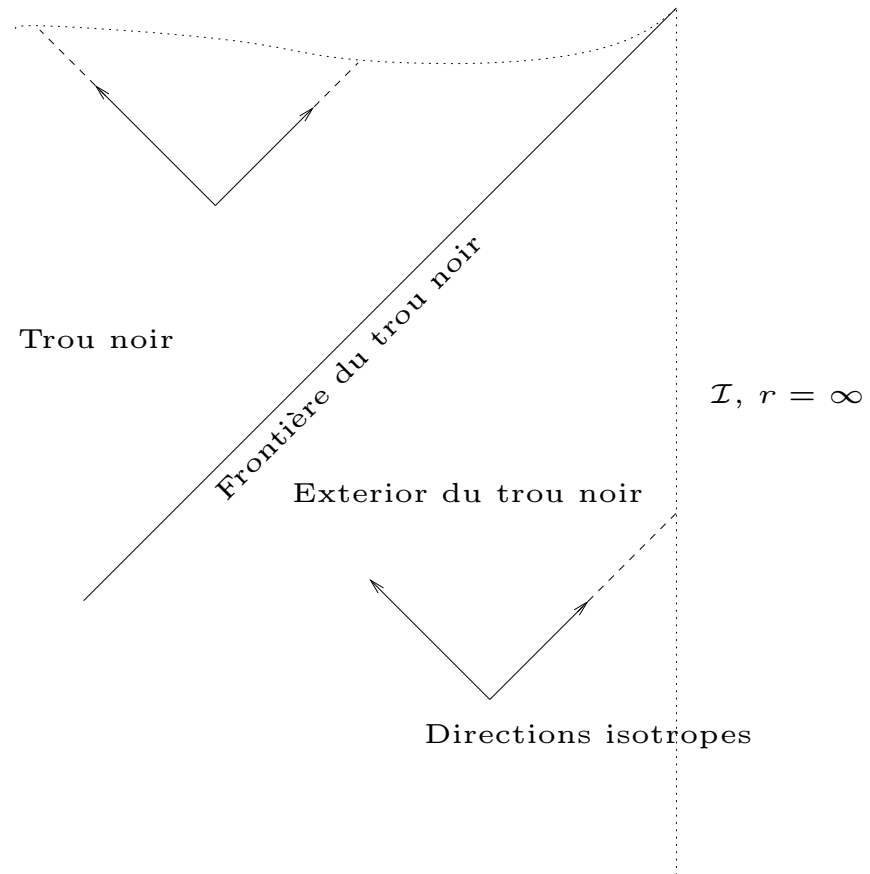
- T Killing, on peut commuter les équations et obtenir $E(T(\psi)) < \infty$ si bornée initialement.
- Mais $E(T(\psi))$ contrôle $\int_{\Sigma_t} \psi_t^2 r^2 dr d\omega$.
- A partir d'estimations elliptiques, on améliore les poids pour les autres dérivées et ψ .



Ondes confinées dans Anti-de-Sitter

- Energie rayonnée à l'infini = 0.
- Conditions à l'infini de type miroir.
- Onde confinée.
- Existence de solutions régulières (dans H^2_{AdS}) périodiques en temps

Schwarzschild et Schwarzschild-AdS : trous noirs



Schwarzschild et Schwarzschild-AdS : extérieur du trou noir

Soit $\mathcal{R} = [r_+, \infty) \times \mathbb{R}_t \times S^2$ et $M > 0$ une constante et g une métrique tel que :

$$g = -(1 - \mu)dt^2 + (1 - \mu)^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma_{S^2}.$$

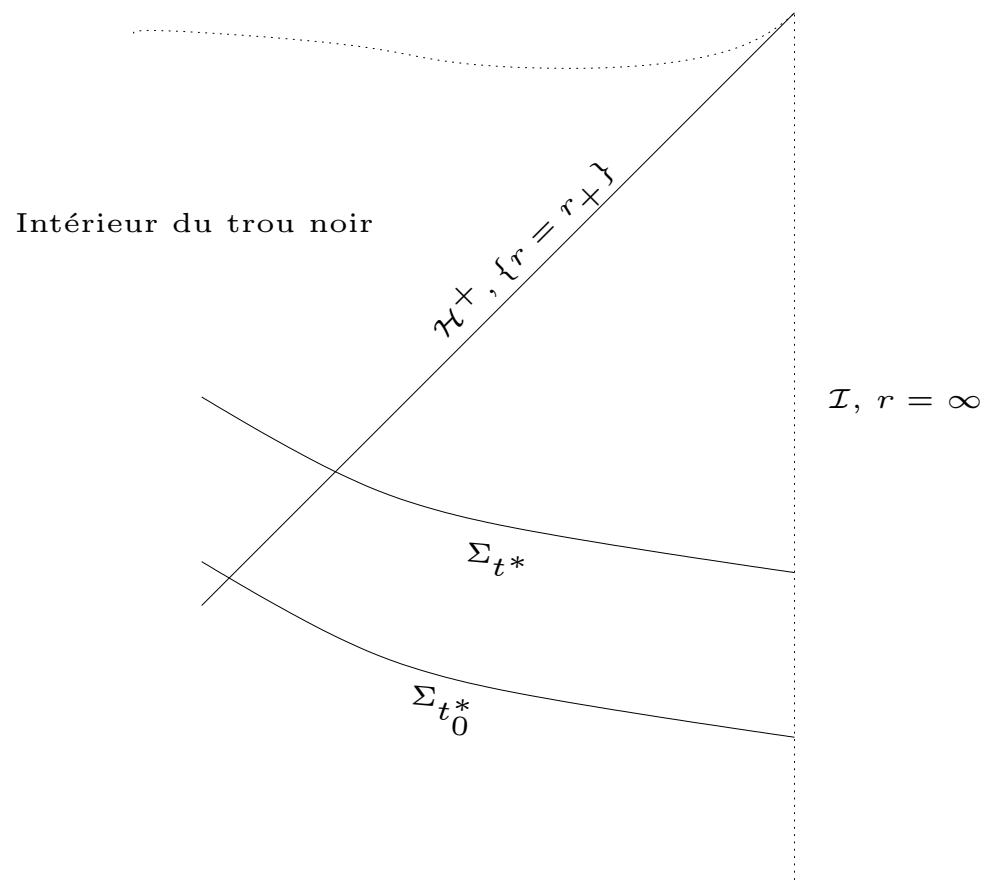
avec

$$1 - \mu = 1 - \frac{2M}{r} \text{ pour Schwarzschild,}$$

$$1 - \mu = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2} \text{ pour Schwarzschild-Anti-de-Sitter,}$$

$$(1 - \mu)(r_+) = 0.$$

- g semble singulier en r_+ et définit pour $r > r_+$ mais en fait singularité de coordonnée
- On introduit un autre système de coordonnées (t^*, r, ω) , tel que g régulier sur $\partial\mathcal{R} = \{r = r_+\}$.



Métrie de Kerr-AdS :

$$g_{KAdS} = \frac{\Sigma}{\Delta_-} dr^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_\theta} d\theta^2 + \frac{\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta_- a^2 \sin^2 \theta}{\Xi^2 \Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$- 2 \frac{\Delta_\theta (r^2 + a^2) - \Delta_-}{\Xi \Sigma} a \sin^2 \theta d\phi dt - \frac{\Delta_- - \Delta_\theta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2$$

avec

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta_\pm = (r^2 + a^2) \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \right) \pm 2Mr$$

$$\Delta_\theta = 1 - \frac{a^2}{l^2} \cos^2 \theta, \quad \Xi = 1 - \frac{a^2}{l^2}.$$

Le problème : Démontrer une décroissance quantitative des solutions de $\square_g \psi = m\psi$ pour $(\psi, \psi_t) \in H_{AdS}^k \times H_{AdS}^{k-1}$.

Sur Schwarzschild et Kerr, grande littérature (Dafermos-Rodnianski, Tataru-Tohaneanu, Tohaneanu, Blue-Sterbenz, Andersson-Blue,...).

Idem sur Schwarzschild-de-Sitter, Kerr-de-Sitter (Dafermos-Rodnianski, Bony-Häfner, Vasy, Dyatlov, Melrose-Sa Barreto-Vasy, ..)

3 régions différentes de \mathcal{R} et trois difficultés différentes

- La région proche du trou noir : dégénérescence de l'énergie et superradiance
- La région intermédiaire : trajectoires captées
- La région proche de l'infini : ...

La région proche du trou noir

- $T = \partial_t$ est Killing
- Mais T devient isotrope sur \mathcal{H}^+ .
- L'énergie contrôlée

$$E_{deg}(\psi) = \int_{\Sigma_t} (\phi_t^2 + (r - r_+) \phi_r^2 + \dots) r^2 dr d\omega.$$

dégénère en r_+ .

- Pour Kerr, la densité d'énergie est même négative (superradiance)!

La région proche du trou noir :

Proposition 1 (Dafermos-Rodnianski). *Il existe un champ de vecteur N de type temps, avec $g(T, N) < 0$, invariant par $T = \partial_t$, et $r_1 > r_0 > r_+$ tel que :*

1. *Pour $r \in [r_+, r_0]$, $J_\mu^N[\psi]N^\mu \leq K^N[\psi]$,*
2. *Pour $r > r_1$, $N = T$*

Cette proposition quantifie une propriété physique bien connue des trous noirs : l'effet de décalage vers le rouge.

On obtient :

$$\int_{\Sigma_{t^*}} J_\mu^N[\psi]n^\mu + \int_{t_0^*}^{t^*} \int_{\Sigma_{t'} \cap \{r_+ \leq r \leq r_0\}} J_\mu^N[\psi]n^\mu \leq \int_{\Sigma_{t_0^*}} J_\mu^N[\psi]n^\mu + \int_{\{r_0 \leq r \leq r_1\}} K^N.$$

Dans Schwarzschild-(AdS), on peut alors démontrer (Holzegel pour Schwarzschild-AdS)

$$\int_{\Sigma_{t^*}} J_{\mu}^N n_{\Sigma_{t^*}}^{\mu} \leq \int_{\Sigma_0} J_{\mu}^N n_{\Sigma_0}^{\mu}, \quad (1)$$

i.e. on contrôle toutes les dérivées sans dégénérescence au voisinage de r_+ .

- En fait, ce résultat est valable pour une classe de perturbation C^1 de Schwarzschild-AdS qui inclue Kerr-AdS (Holzegel)
- Dans Kerr, superradiance ($J_{\mu}^T T^{\mu} < 0$) couple ce résultat à de la décroissance pour certaines fréquences (Dafermos-Rodnianski)
- Dans Kerr-AdS, on peut utiliser une combinaison de champs de Killing $T + a\partial_{\phi}$

La région intermédiaire : trajectoires captées I

- Il existe des géodésiques isotropes qui ne s'échappent pas ni à l'infini, ni vers l'intérieur du trou noir.
- Ces trajectoires oscillent sur $r = 3M$ (sphère des photons).
- C'est une obstruction "haute-fréquence" à la décroissance de l'énergie.
- Technique standard (cf Morawetz) : champs de vecteur radial $f(r)\partial_r$ dégénéré en $r = 3M$ pour démontrer une décroissance intégrée (Multiplier estimate) :

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Sigma_t} f(r) J_{\mu}^N n_{\Sigma_t}^{\mu} dt \leq \int_{\Sigma_0} J_{\mu}^N n_{\Sigma_0}^{\mu}$$

La région à l'infini : trajectoires captées II!

Heuristique :

- les trajectoires qui ne franchissent pas $r = 3M$ s'échappent à l'infini mais aucune énergie n'est rayonnée à l'infini. \rightarrow réflexion à l'infini.
- Décroissance vient de l'effet tunnel à travers $r = 3M$, \rightarrow décroissance faible (logarithmique).

Décroissance des ondes sur Schwarzschild-AdS

Nous démontrons :

Théorème 2 (Holzegel-Smulevici, 2011). *Soit ψ une solution dans H^2_{AdS} de $\square_g \psi = 0$ sur (\mathcal{M}, g) Schwarzschild-AdS. Alors, on a :*

$$\left(\|\psi\|_{H^1_{AdS}} + \|\psi_t\|_{H^0_{AdS}} \right) (t^*) \leq \frac{C}{\log t^*} \left(\|\psi\|_{H^2_{AdS}} + \|\psi_t\|_{H^1_{AdS}} \right) (t^* = 0),$$

Eléments fondamentaux de la preuve :

- une décomposition en harmonique sphérique
- Pour les basses fréquences, on utilise un champs de vecteur radial pour démontrer décroissance intégrée en temps
- Pour les hautes fréquences, on utilise une inégalité de Poincaré et un argument d'interpolation standard.

Elements “supplémentaires”

- Difficulté : construction des multiplieurs globalement positifs
- Tenseur énergie-impulsion modifié
- Transformée de Fourier en temps $t \rightarrow \omega$
- Cut-off en ω et Cut-off en temps.
- Analyse des fréquences quasi-stationnaires séparément

- En fait, le théorème est valable pour toute variété de type trou noir régulier et à symétrie sphérique (asymptotiques Anti-de-Sitter sont le pire cas).
- Le résultat est valable aussi sur Kerr-AdS.
- Dans le cas du problème à obstacle sur Minkowski, résultat général de N. Burq : Décroissance de l'énergie locale au moins logarithmique.

Stabilité de Schwarzschild-AdS pour le système Einstein-Klein-Gordon en symétrie sphérique

Le système Einstein-Klein-Gordon :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu},$$

où T est le tenseur d'énergie-impulsion associé à un champ scalaire ψ satisfaisant $\square_g \psi = m\psi$.

Résultats principaux (en collaboration avec G. Holzegel, 2011) :

- Existence locale et critères de continuation des solutions
- *Stabilité orbitale et asymptotique* de Schwarzschild-AdS

Analyse contient :

- Estimations de type $\int_t \|\phi\|_{H^1_{AdS}} < \infty$ (méthode de champ de vecteurs)
- Décroissance ponctuelle des solutions
- Bootstrap permettant propagation d'inégalités de Hardy à poids