Corrigé du partiel du 4 novembre

Solution de l'exercice 1. Initialisation : Pour $n = 2$, le membre de gauche vaut $x^2 - 1$ et le membre de droite $(x-1)(x+1)$. On reconnaît une identité classique. Hérédité : Supposons la relation vraie à l'ordre n. Alors,

$$\begin{aligned}(x-1)(1+x+\cdots+x^n) &= (x-1)(1+x+\cdots+x^{n-1}) + (x-1)x^n \\ &= x^n - 1 + x^{n+1} - x^n \\ &= x^{n+1} - 1,\end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de l'hypothèse de récurrence. On a donc la relation à l'ordre $n+1$.

Solution de l'exercice 2.

(a) Le nombre d'injections de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ est le nombre d'arrangements de 3 éléments parmi 7, à savoir,

$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = 7 \times 6 \times 5 = 210.$$

(b) Comme $\operatorname{card}\{1,2,3,4,5,6,7\} = 7 > 3 = \operatorname{card}\{1,2,3\}$, il n'y aucune injection de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ dans $\{1,2,3\}$.

(c) Le nombre N d'applications de $\mathscr{P}(\{1,2,3,4,5\})$ dans $\{1,2\}$ est égal au cardinal de $\{1,2\}$ à la puissance le cardinal de $\mathscr{P}(\{1,2,3,4,5\})$. Or, $\operatorname{card}\mathscr{P}(\{1,2,3,4,5\}) = 2^5 = 32$, donc $N = 2^{32}$.

Solution de l'exercice 3. Voici le triangle de Pascal jusqu'à la ligne des coefficients C_8^k, $k \in \{0,\ldots,8\}$:

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Rappelons la formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$. Pour $n = 8$, $a = -x$ et $b = 1$, on obtient :

$$(1-x)^8 = 1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8.$$

Solution de l'exercice 4.

(a) Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in A \cup B$; alors $x \in A$ (et donc $x \in B$) ou bien $x \in B$; donc $x \in B$. Ceci montre que $A \cup B \subset B$.

Réciproquement, supposons que $A \cup B \subset B$. Soit $x \in A$; alors $x \in A \cup B \subset B$, donc $x \in B$. Ceci montre que $A \subset B$.

(b) Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in A$; alors $x \in B$ et donc $x \in B \cap A$. Ceci montre que $A \subset B \cap A$.

Réciproquement, supposons que $A \subset B \cap A$. Soit $x \in A$; alors $x \in A \subset B \cap A$, donc $x \in B$. Ceci montre que $A \subset B$.

(c) Supposons que $A \subset B$ et montrons que $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$. Soit $x \in E$ quelconque. Si $x \notin A$ alors $\mathbb{1}_A(x) = 0 \leq \mathbb{1}_B(x)$. Si $x \in A$ alors comme $A \subset B$ on a aussi $x \in B$ et donc $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$. Dans tous les cas $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.

Réciproquement, supposons que $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$ et démontrons que $A \subset B$. Soit $x \in E$ quelconque. Si $x \in A$ alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$. Mais par hypothèse $\mathbb{1}_B(x) \geq \mathbb{1}_A(x) = 1$. Comme $\mathbb{1}_B(x)$ ne peut valoir que 0 ou 1, on en déduit que $\mathbb{1}_B(x) = 1$, c'est-à-dire $x \in B$. On a montré que $(x \in A) \Longrightarrow (x \in B)$. Donc $A \subset B$.

Solution de l'exercice 5.

(a) On a : $\mathscr{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Il y a 4 parties de cardinal pair et autant de parties de cardinal impair.

(b) (1) Soit A quelconque dans $\mathscr{P}(E)$. Si $e \in A$, alors $f(A) = A \setminus \{e\}$, et donc $f(f(A)) = (A \setminus \{e\}) \cup \{e\} = A$. Si $e \notin A$, alors $f(A) = A \cup \{e\}$, et par suite $f(f(A)) = (A \cup \{e\}) \setminus \{e\} = A$. Donc $f \circ f$ est l'identité de $\mathscr{P}(E)$. D'après un théorème du cours, ceci montre que f est bijective.

(2) Soit $A \in \mathscr{P}_{\mathrm{i}}$. Si $e \notin A$, alors $f(A) = A \cup \{e\}$. Comme $\operatorname{card} A$ est impair et $e \notin A$, $\operatorname{card}(A \cup \{e\}) = 1 + \operatorname{card}(A)$ est pair. Si $e \in A$, alors $f(A) = A \setminus \{e\}$. Comme $\operatorname{card} A$ est impair et $e \in A$, $\operatorname{card}(A \setminus \{e\}) = \operatorname{card}(A) - 1$ est pair. Donc, dans les deux cas, $f(A) \in \mathscr{P}_{\mathrm{p}}$.

Soit $A \in \mathscr{P}_{\mathrm{p}}$. Si $e \notin A$, alors $f(A) = A \cup \{e\}$. Comme $\operatorname{card} A$ est pair et $e \notin A$, $\operatorname{card}(A \cup \{e\})$ est impair. Si $e \in A$, alors $f(A) = A \setminus \{e\}$. Comme $\operatorname{card} A$ est pair et $e \in A$, $\operatorname{card}(A \setminus \{e\})$ est impair. Donc, dans les deux cas, $f(A) \in \mathscr{P}_{\mathrm{i}}$.

(3) La question précédente montre que $\operatorname{card} f(\mathscr{P}_{\mathrm{i}}) \leq \operatorname{card} \mathscr{P}_{\mathrm{p}}$ et $\operatorname{card} f(\mathscr{P}_{\mathrm{p}}) \leq \mathscr{P}_{\mathrm{i}}$. Comme f est bijective, $\operatorname{card} f(\mathscr{P}_{\mathrm{i}}) = \operatorname{card} \mathscr{P}_{\mathrm{i}}$ $\operatorname{card} f(\mathscr{P}_{\mathrm{p}}) = \operatorname{card} \mathscr{P}_{\mathrm{p}}$. Donc $\operatorname{card} \mathscr{P}_{\mathrm{i}} \leq \operatorname{card} \mathscr{P}_{\mathrm{p}} \leq \operatorname{card} \mathscr{P}_{\mathrm{i}}$. Donc $\operatorname{card} \mathscr{P}_{\mathrm{i}} = \operatorname{card} \mathscr{P}_{\mathrm{p}}$.