Chapitre 5

Suites numériques

Ce chapitre propose une étude rigoureuse des suites de nombres réels. Son objectif principal est d'acquérir une bonne maîtrise des techniques de base de l'analyse réelle à savoir : calculer, majorer, minorer, approcher. On introduira la notion de "convergence" qui est un concept fondamental en analyse et on insistera sur son utilisation comme moyen d'approcher par exemple certains nombres irrationnels par des nombres rationnels (par exemple des décimaux). On donnera enfin quelques exemples simples de suites récurrentes pour illustrer la méthode des itérations successives en montrant comment les suites convergentes peuvent être utilisées pour approcher les nombres réels solutions de certaines équations non linéaires fournissant ainsi un algorithme qui peut être utilisé concrètement dans la pratique (voir par exemple l'approximation de la racine carrée).

La notion de convergence n'est pas facile à appréhender. Prenons un exemple pour commencer : chacun sait que le nombre $1/3$, en écriture décimale, est $0,3333\ldots$. Qu'est-ce que cela signifie précisément ?

Si on écrit n décimales, le nombre $0,3333\ldots 3$ est par définition $33\ldots 3/10^n$ (nous y reviendrons). Maintenant, lorsqu'on augmente le nombre de décimales dans l'écriture, par exemple si l'on passe de 100 à 1000 décimales, le nombre qu'on écrit se "rapproche" de plus en plus de $1/3$. En d'autre termes, lorsque le nombre de décimales augmente infiniment (on dira "tend vers l'infini"), le nombre écrit se rapproche "infiniment" de $1/3$. C'est assez facile à comprendre sur cet exemple : ce nombre x_n des écritures avec n décimales vaut en fait

$$x_n = \frac{1}{10^n}\big(3 + 10 \times 3 + \ldots + 10^{n-1} \times 3\big) = \frac{3}{10^n}\big(1 + 10 + \ldots + 10^{n-1}\big).$$

Maintenant, grâce à la formule (3.1) page 43, ceci est égal à

$$x_n = \frac{3}{10^n}\frac{10^n - 1}{9} = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{10^n}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 10^n}.$$

Le nombre $\frac{1}{3\times 10^n}$ est de plus en plus petit lorsque n est de plus en plus grand, et on voit bien que le résultat se rapproche de plus en plus de $1/3$. On dira que $1/3$ est la limite de la suite x_n. Notre but dans ce chapitre est de définir correctement ce qu'on entend par là .

Exercice 131. En utilisant le même raisonnement que pour $1/3$, justifiez l'écriture de $1/7$

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\ldots.$$

L'écriture décimale est ici le nombre 142857 répété une infinité de fois.

5.1 Notion de convergence et limite d'une suite

On rappelle qu'une *suite* de nombres réels est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque entier $n \in \mathbb{N}$ associe un nombre réel $u(n)$ encore noté u_n. On parle alors de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général u_n, appelé aussi le *terme de rang n* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Il arrive que l'application u soit définie sur une partie infinie $I \subset \mathbb{N}$, on parle dans ce cas de la suite $(u_n)_{n\in I}$ indexée par I.

5.1.1 Suites et sous-suites

Une suite n'est pas nécessairement une suite de nombres. Elle peut prendre ses valeurs dans n'importe quoi. Mais c'est pour les suites à valeurs dans $\mathbb{R}$, ou dans $\mathbb{C}$, que nous parlerons de convergence.

Définition (Suite)**.** *Soit E un ensemble. Une suite à valeurs dans E est une application $x = \mathbb{N} \mapsto E$. On note en général x_n pour $x(n)$. La suite elle même sera notés $(x_n)_{n\geq 0}$, ou plus simplement (x_n).*

Lorsque $E = \mathbb{R}$, on parle de suite réelle, et lorsque $E = \mathbb{C}$, on parle de suite complexe. Mais on peut bien sûr envisager des suites à valeurs dans bien d'autres ensembles, comme des suites de fonctions.

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons essentiellement aux suites réelles. Nous en avons déjà vu plusieurs exemples, comme $x_n = n!$ ou bien $x_n = 1/n$. Dans ce dernier cas, la suite n'est définie que pour $n \geq 1$.

De façon générale, il se peut que la suite ne soit définie que pour $n \geq n_0$. On peut alors considérer la suite $y_n = x_{n+n_0}$, qui est elle définie pour tout $n \geq 0$. Pour les problèmes de convergence qui vont nous occuper dans la suite, cela ne fait aucune différence. Dans ce cas, (y_n) est ce que l'on appelle *une suite extraite* de (x_n). Comme cette notion de suite extraite sera très utilisée dans ce cours, nous en donnons une définition précise.

Définition (Suite extraite, ou sous-suite)**.** *Soit (x_n) une suite, et soit $p : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ une suite strictement croissante (c'est à dire, pour tout n, $p(n+1) > p(n)$). Alors la suite $y_n = x_{p(n)}$ est appelée suite extraite de x_n. On la note souvent x_{p_n}. On dit aussi que x_{p_n} est une sous-suite de la suite x_n.*

Les valeurs prises par une suite extraite sont donc choisies parmi celles de la suite x_n, dans l'ordre croissant. Par exemple, la suite 2^{-n} est extraite de la suite $1/n$, mais la suite $n2^{-n}$ ne l'est pas.

Nous exigeons que la suite p soit strictement croissante pour éviter par exemple que la suite $(x_1, x_1, x_1, \ldots, x_1, \ldots)$ soit considérée comme une suite extraite de x_n.

__Remarque__ **8.** *Dans toute la suite, nous nous intéresserons essentiellement aux suites réelles. C'est en ce sens que nous utiliserons le mot suite dans ce texte.*

5.1.2 Convergence d'une suite réelle

Définition (Convergence)**.** *On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On notera dans ce cas $x_n \to_{n\to\infty} \ell$, ou encore $x_n \to \ell$. En d'autres termes :*

$$x_n \to_{n\to\infty} \ell \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Nous dirons que la suite (x_n) converge lorsqu'il existe un réel ℓ pour lequel $x_n \to \ell$. Si la suite est définie seulement pour $n \geq n_0$, on adapte la définition en remplaçant $N \in \mathbb{N}$ par $N \geq n_0$ (et $N \in \mathbb{N}$ que l'on sous-entend souvent pour ne pas alourdir les notations).

Ce qu'il faut comprendre dans cette définition, c'est que quel que soit ε *aussi petit que l'on veut*, à partir d'un certain rang N (qui peut être très grand), on peut affirmer que la distance de x_n à ℓ est inférieure à ε.
Exemple. La suite $x_n = 1/n$, définie pour $n \geq 1$ converge vers 0. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $N\varepsilon \geq 1$ (ceci n'est rien d'autre que le fait que $\mathbb{R}$ soit archimédien). Alors, pour tout $n \geq N$, on a $n\varepsilon \geq 1$, soit $x_n \leq \varepsilon$. Mais $x_n = |x_n| = |x_n - 0|$ car $x_n \geq 0$, et donc $\lim_n x_n = 0$.

La définition de la notion de limite est assez compliquée. Dans la pratique, nous ne l'utiliserons que dans des cas particuliers. Ensuite, on se donnera des règles qui permettent de ramener l'étude de la convergence de suites compliquées à des suites plus simples, pour lesquelles la convergence ne posera pas de problème. Il y a plusieurs remarques importantes à faire à propos de cette définition. Commençons par vérifier l'unicité de la limite.

Proposition 5.1.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels qui converge vers ℓ. Alors le nombre réel ℓ est unique. Ceci justifie la notation $\lim_{n\to\infty} u_n$ pour* **la** *limite de la suite (u_n).*

Démonstration. — En effet, supposons que la suite vérifie à la fois $u_n \to \ell_1$ et $u_n \to \ell_2$. Nous voulons montrer que $\ell_1 = \ell_2$.

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel arbitraire. En appliquant la définition de la convergence à chacun avec $\varepsilon/2$ à chacune des limites, on aboutit à l'existence d'un entier $N_1 \geq 1$ et d'un entier $N_2 \geq 1$ tels que pour tout $n \geq N_1$ on aie on ait $|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon/2$ et pour tout $n \geq N_2$, on aie $|u_n - \ell_2| \leq \varepsilon/2$.

Posons $N := \max\{N_1, N_2\}$ et écrivons $\ell_1 - \ell_2 = (\ell_1 - u_N) + (u_N - \ell_2)$. En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient $|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - u_N| + |u_N - \ell_2|$. Il en résulte grâce au choix de N que $|\ell_1 - \ell_2| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Nous pouvons alors appliquer la remarque 5, page 74, pour en conclure que $|\ell_1 - \ell_2| = 0$, d'où $\ell_1 = \ell_2$. ∎

L'énoncé suivant se déduit immédiatement de la définition.

Proposition 19. *Soit (x_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors*

$$x_n \to \ell \iff x_n - \ell \to 0 \iff |x_n - \ell| \to 0.$$

En pratique on utilisera souvent cet autre énoncé

Proposition 20. *Soient (x_n), (y_n) deux suites réelles $k \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}^+$. Si $\forall n \geq k$, $|x_n| \leq M|y_n|$ et $\lim_n y_n = 0$ alors $\lim_n x_n = 0$.*

Démonstration. — Remarquons pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier N (que l'on peut choisir plus grand que k) tel que pour $n \geq N$, $|y_n| \leq \varepsilon/M$, et donc, toujours pour $n \geq N$, $|x_n| \leq \varepsilon$. ∎

Remarque 9. *Pour appliquer la définition de la convergence d'une suite, encore faut-il connaître par avance le nombre ℓ. Nous verrons bientôt des critères où nous pourrons affirmer que la suite (x_n) converge sans connaître ℓ.*

Dans les applications, lorsqu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, il arrive souvent qu'elle donne naissance à un nouveau nombre réel ℓ que l'on ne connait pas à priori. Lorsque $\varepsilon > 0$ est donné, l'entier N à partir duquel on a l'inégalité $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, est alors important d'un point de vue "qualitatif", puisque $u_N - \varepsilon \leq \ell \leq u_N + \varepsilon$. On dira que u_N est une valeur approchée (ou un approximant) de ℓ à $\varepsilon-$près. Le nombre réel ε doit être assez petit et représente l'erreur maximale commise dans l'approximation de ℓ par u_N. Il est dans ce cas important de trouver le plus petit entier N (qui dépend de ε) vérifiant cette propriété. Il représente le nombre minimum d'opérations permettant de calculer ℓ avec une erreur au plus égale à ε.

Cependant d'un point de vue "qualitatif", pour démontrer qu'une suite converge, il n'est pas nécessaire de trouver le plus petit entier N satisfaisant aux exigences de la définition, ce qui peut être assez compliqué. Il suffit d'en trouver un.

Remarque 10. *Lorsqu'une suite converge, tous ses termes ont tendance à "s'accumuler" arbitrairement près (i.e. à ε près, ε étant arbitraire) autour d'un même nombre réel à savoir sa limite, à l'exception d'au plus un nombre fini d'entre eux N.*
Il en résulte que la nature d'une suite (convergence ou non) ainsi que sa limite, lorsqu'elle existe, ne change pas si l'on modifie ou supprime un nombre fini de termes de cette suite. Par exemple, si $p \geq 1$ est un entier fixé, la suite $(u_{n+p})_{n\geq 0}$, dite tronquée au rang p, est de même nature que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et a la même limite lorsque celle-ci existe (à vérifier !).

Suites complexes

Il peut arriver que nous ayons affaire à une suite à valeurs dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. La définition de la convergence est alors la même, à ceci près que nous devons remplacer la fonction valeur absolue $|x|$ par le module $|z|$ du nombre complexe, c'est à dire, pour $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Définition. *Une suite (z_n) à valeurs dans $\mathbb{C}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ |z_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Si $z_n = x_n + iy_n$ et $\ell = \ell_1 + i\ell_2$, (où x_n, y_n, ℓ_1, ℓ_2 sont réels), alors z_n converge vers ℓ si et seulement si x_n converge vers ℓ_1 et y_n converge vers ℓ_2. Pour le voir, il suffit de remarquer dans un sens que $|x_n - \ell_1| \leq |z_n - \ell|$, $|y_n - \ell_2| \leq |z_n - \ell|$, et dans l'autre que $|z_n - \ell| \leq 2(|x_n - \ell_1| + |y_n - \ell_2|)$. On applique ensuite la remarque 20 de la page 85, puis le fait que la somme de deux suites qui convergent vers 0 converge vers 0 (proposition 5.2.4, page 90).

Donnons quelques exemples simples pour illustrer et manipuler ces définitions.

Exemples.

(i) Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *constante* s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = c$ pour tout $n \geq 0$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *stationnaire* s'il existe un rang $p \geq 0$ et un nombre réel $c \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = c$ pour tout $n \geq p$. Dans ce cas la suite converge vers c (à démontrer en utilisant la définition).

(ii) Si $p \geq 1$ est un entier fixé, la suite $(1/n^p)_{n\geq 0}$ converge vers 0.
En effet, en posant $N = \lfloor 1/\varepsilon^{1/p} \rfloor + 1$, on obtient pour tout $n \geq N$, $1/n^p \leq 1/N^p \leq \varepsilon$.

(iii) Posons $u_n := \frac{2n}{n+\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$ et montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$. En effet pour $n \geq 1$, on a :

$$u_n = \frac{2n}{n+\sqrt{n}} = \frac{2(n+\sqrt{n}) - 2\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = 2 - \frac{2\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}.$$

D'où $u_n - 2 = -\frac{2\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$ et donc $|u_n - 2| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$, pour tout $n \geq 1$.
Soit $\varepsilon > 0$, pour avoir l'inégalité $|u_n - 2| \leq \varepsilon$, il suffit d'avoir l'inégalité $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon$, i.e. $n > 4/\varepsilon^2$. Pour cela il suffit de poser $N = \lfloor 4/\varepsilon^2 \rfloor + 1$. Alors pour $n \geq N$, on a $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon$ et donc pour $n \geq N$, on a $|u_n - 2| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve notre assertion. Observer que l'entier N trouvé ici n'est pas le plus petit possible, mais cela suffit à prouver la convergence !

Remarque 11. *Dans la définition de la limite, il est important que la propriété soit vraie pour tout $\varepsilon > 0$. Si on avait demandé qu'elle soit vraie pour $\varepsilon \geq 0$, c'est à dire*

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists N, \forall\ n \geq N,\ |x_n - \ell| \leq \varepsilon,$$

alors on pourrait l'appliquer avec $\varepsilon = 0$, et cela signifierait que pou n assez grand, $x_n = \ell$, ce qui n'est pas la même chose.

Par contre, d'autres définitions peuvent être équivalentes, comme les lecteurs pourront le vérifier à titre d'exercice. Par exemple

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ |x_n - \ell| < \varepsilon,$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ |x_n - \ell| < \varepsilon,$$

ou bien encore

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q},\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ |x_n - \ell| \leq \varepsilon,$$

et même

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ |x_n - \ell| < \frac{1}{p},$$

et bien d'autres encore. Remarquons que la définition peut aussi sécrire sous la forme équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ n \geq N \Longrightarrow |x_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

5.1.3 Sous-suites et limites

La première remarque à faire est qu'une sous suite d'une suite convergente est convergente.

Proposition 21. *Si y_n est une suite extraite de la suite x_n, si $\lim_n x_n = \ell$, alors $\lim_n y_n = \ell$.*

Démonstration. — Dire que y_n est extraite de x_n revient à dire qu'il existe une fonction $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que que $y_n = x_{p_n}$. La fonction p étant strictement croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$, on vérifie facilement par récurrence que pour tout n, on a $p(n) \geq n$.

Soit donc $\varepsilon > 0$: il existe N tel que, si $n \geq N$, $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$. Mais alors, si $n \geq N$, $p(n) \geq n \geq N$, et donc

$$|y_n - \ell| = |x_{p(n)} - \ell| \leq \varepsilon,$$

et par conséquent, y_n converge vers ℓ.

∎

Ainsi, dans l'exemple (ii) de la page 86, la suite $x_n = 1/n^p$ est extraite de la suite $1/n$, et donc converge vers 0.

Remarque 12. *Dans la pratique, ce résultat est très utile pour montrer qu'une suite ne converge pas. Il suffit de trouver deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes. Ainsi, la suite $u_n = (-1)^n$ ne converge pas, car $u_{2n} = 1$ et donc converge vers 1, tandis que $u_{2n+1} = -1$ et donc converge vers -1.*

A titre d'exemple d'application de la proposition 21, nous avons

Corollaire 2. *Soit (x_n) une suite qui converge vers ℓ et soit $p \in \mathbb{N}$ un entier. Alors :*
-la suite $(x_{n+p})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ,
-les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers ℓ.

(Voir l'exercice 139 pour une réciproque de ce dernier point).

5.1.4 Limites infinies

Lorsqu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas, on dira par définition qu'elle *diverge*. En fait lorsqu'une suite diverge, elle peut avoir des comportements très variés. Nous allons décrire un type de comportement qui est étroitement lié à la notion de convergence (voir exercice 134).

Définition 5.1.2.

(1) *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *de nombres réels* a pour limite $+\infty$ *si pour tout nombre réel* $A > 0$ *il existe un rang* $N \geq 0$ *tel que pour tout* $n \geq N$*, on ait* $u_n \geq A$*. On dira aussi que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ *et on écrira dans ce cas* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *ou encore* $\lim_n x_n = +\infty$.

(2) *On dit que la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ a *pour limite* $-\infty$ *si pour tout nombre réel* $A > 0$ *il existe un rang* $N \geq 0$ *tel que pour tout* $n \geq N$*, on ait* $u_n \leq -A$*. On dira aussi que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $-\infty$ *et on écrira dans ce cas* $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$*, ou encore* $\lim_n x_n = -\infty$.

On peut faire les mêmes remarques à propos de cette définition que celles faites à propos de la convergence. Elle suivent les mêmes règles en ce qui concerne les sous-suites.

Observons que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $-\infty$ si et seulement si la suite $(-u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$.

Une suite tend vers $+\infty$ lorsque ses termes deviennent arbitrairement grands à partir d'un certain rang.

Cette propriété ne change pas si on modifie ou supprime un nombre fini de termes de la suite. Le lien entre les deux notions de limites (finies et infinies) sera établi plus loin.

Donnons quelques exemples pour illustrer cette définition.

Exemples.

(i) Pour $x_n = n$: $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ (heureusement !)

(ii) Soit $p \geq 1$ un entier fixé. Alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty.$$

C'est en effet une suite extraite de la précédente.

(iii) Soit $a > 1$ un nombre réel. Alors $\lim_n a^n = +\infty$.

En effet, posons $b := a - 1$ de sorte que $b > 0$ et $a = 1 + b$ et vérifions par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(1+b)^n \geq 1 + n \cdot b. \tag{5.1}$$

En effet cette inégalité est évidente pour $n = 0$. Supposons qu'elle soit vérifiée pour un entier $n \geq 0$. Alors on en déduit que $(1+b)^{n+1} = (1+b)\cdot(1+b)^n \geq (1+b)\cdot(1+n\cdot b) = 1 + b + n\cdot b + n\cdot b^2 \geq 1 + (n+1)\cdot b$. Ce qui prouve donc l'inégalité (5.1) au rang $n+1$.

(Nous aurions pu voir directement cette propriété en utilisant la formule du binôme, en remarquant que $\binom{n}{1} = n$.)

Pour démontrer (iii), fixons $A > 0$ arbitraire : il existe une constante N telle que $N \cdot b > A$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $n \cdot b \geq N \cdot b > A$. Par suite d'après (5.1), on en déduit que pour tout $n \geq N$, on a $(1+b)^n > A$, ce qui prouve (iii).

(iv) Soit $0 < q < 1$. Il résulte de l'exemple précédent (à démontrer !) que

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0.$$

On pose pour $n \geq 1$, $S_n := \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \ldots + q^n$. La formule fondamentale (3.1) de la page 43 nous donne

$$\forall n \geq 1, \quad (1-q)S_n = 1 - q^{n+1}.$$

On en déduit alors que
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$
De plus on a l'inégalité fondamentale suivante
$$\forall n \geq 1,\ 1 + q + \ldots + q^n < \frac{1}{1-q}.$$

5.2 Propriétés élémentaires des suites et règles de calcul

Les propriétés énoncées dans ce paragraphe sont élémentaires mais sont fondamentales pour simplifier l'étude de la convergence des suites.

5.2.1 Suites bornées

Tout d'abord, nous établissons quelques propriétés générales des suites convergentes qui nous seront utiles pour la suite.

Commençons par rappeler quelques définitions déja vues pour les parties de $\mathbb{R}$.

Définition 5.2.1.

(i) On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée dans $\mathbb{R}$ s'il existe un nombre réel B tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq B$. On dit alors que B est un majorant de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}$ ou que celle-ci est majorée par B.

(ii) On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est minorée dans $\mathbb{R}$ s'il existe un nombre A tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq A$.

(iii) On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée si la suite est à la fois majorée et minorée.

Remarque 13. *Observons qu'une suite $(u_n)_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe un réel $M > 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: pour le voir, observons que si $\forall n \in \mathbb{N}, A \leq u_n \leq B$, la propriété est vraie avec $M := \max\{|A|, |B|\}$.*

On a alors les propriétés élémentaires suivantes.

Proposition 5.2.2.

(i) Toute suite de nombres réels qui converge dans $\mathbb{R}$ est une suite bornée dans $\mathbb{R}$.

(ii) Toute suite de nombres réels qui a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) est une suite non majorée (resp. non minorée) dans $\mathbb{R}$.

(iii) Si une suite u_n converge vers $b \neq 0$, alors il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \neq 0$.

Démonstration. — En effet, supposons d'abord que $\ell := \lim_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$ et fixons $\varepsilon = 1$. Il existe alors par définition un entier $N \geq 1$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq 1$. Par l'inégalité triangulaire, on a donc $|u_n| \leq |\ell| + 1$ pour $n \geq N$. En posant
$$M := \max\{|\ell| + 1, |u_0|, \ldots, |u_{N-1}|\},$$
$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$, et la suite (u_n) est donc bornée.

Supposons maintenant que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Alors par définition pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n > A$. Il en résulte en particulier qu'aucun nombre réel $A > 0$ n'est un majorant de la suite (u_n) et donc celle-ci n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$. Le même raisonnement montre que si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, la suite (u_n) n'est pas minorée dans $\mathbb{R}$.

Pour le dernier point, appliquons la définition de la limite avec $\varepsilon = |b|/2$: il existe un entier N tel que, pour $n \geq N$ $|u_n - b| \leq |b|/2$, d'où $|u_n| \geq |b| - |b|/2 = |b|/2 > 0$. ∎

Remarque 14. *La réciproque de cette proposition est fausse : il ne suffit pas que la suite u_n soit bornée pour qu'elle converge, et il ne suffit pas non plus qu'elle soit non majorée pour converger vers $+\infty$. On le voit sur les exemples suivants*

(1) La suite définie par $u_n := (-1)^n$ pour $n \geq 0$ est bornée mais elle n'a pas de limite (voir exercice 1).

(2) La suite définie par $u_n := (-1)^n \cdot n$ pour $n \geq 0$ n'est ni majorée ni minorée et n'a pas de limite.

(3) La suite $n(1 + (-1)^n)$ est minorée, mais ne converge pas vers $+\infty$ (La sous-suite u_{2n} converge vers $+\infty$ tandis que la sous-suite u_{2n+1} vaut identiquement 0, et donc converge vers 0.

Le résulat suivant est utile dans la pratique.

Proposition 5.2.3. *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors la suite $(a_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la remarque 20 de la page 85 ∎

Exemple. Ainsi, la suite $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0. En effet, $a_n = 1/n$ converge vers 0, et $u_n = (-1)^n$ est bornée.

5.2.2 Opérations algébriques sur les limites

Dans la pratique, on n'a pas besoin de revenir à la définition pour démontrer qu'une suite donnée converge vers une limite ℓ. On part de suites dont on connaît bien la limite, et on construit avec elles de nouvelles suites plus compliquées dont on peut identifier la limite.

Proposition 5.2.4. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels qui convergent vers les nombres réels a et b respectivement. Alors on a les propriétés suivantes :*

(i) (Addition des limites) La suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a + b$ i.e. *:*

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

(ii) (Multiplication des limites) La suite $(u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \cdot b$ i.e. *:*

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n) = (\lim_{n\to+\infty} u_n) \cdot (\lim_{n\to+\infty} v_n).$$

(iii) (Quotient de limites) Si $b \neq 0$, il existe un rang $p \geq 0$ tel que $v_n \neq 0$ pour tout $n \geq p$ et la la suite $(u_n/v_n)_{n\geq p}$ converge vers a/b i.e. *:*

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n/v_n) = (\lim_{n\to+\infty} u_n)/(\lim_{n\to+\infty} v_n).$$

Démonstration. —

Commençons par le point (i) : $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe N_1 tel que, pour $n \geq N_1$, $|x_n - \ell_1| \leq \varepsilon/2$. De même, il existe N_2 tel que, pour $n \geq N_2$, $|y_n - \ell_2| \leq \varepsilon/2$. Alors, pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$|x_n + y_n - \ell_1 - \ell_2| \leq |x_n - \ell_1| + |y_n - \ell_2| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Pour la point (ii), c'est un peu plus compliqué. Tout d'abord, les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, et donc bornées.

Ensuite, on écrit

$$u_n v_n - ab = u_n(v_n - b) + b(u_n - a).$$

Les suites $(v_n - b)$ et $(u_n - a)$ convergent vers 0. Par la proposition 5.2.3 de la page 90, on en déduit que $u_n(v_n - b)$ et $v_n(u_n - a)$ convergent vers 0, et donc par le point (i), la somme converge : $u_n v_n - ab$ converge donc vers 0 et par suite $u_n v_n$ converge vers ab.

Pour le point (iii). On commence par se ramener au bas $b = 1$ en changeant v_n en v_n/b. Grâce à la propriété (ii), on se ramène ensuite au cas $u_n = 1$ pour tout n. La première assertion a déjà été vue dans la proposition 5.2.2. En fait, dans la démonstration de ce point, nous pouvons voir qu'il existe un entier N_0 tel que, pour tout $n \geq N_0$, $|v_n] \geq 1/2$ (ici, $|b| = 1$!) Fixons $n \geq N_0$: on a alors

$$|\frac{1}{v_n} - 1| = \frac{|1 - v_n|}{|v_n|} \leq 2|1 - v_n|.$$

Alors $2|v_n - 1|$ converge vers 0, $|\frac{1}{v_n} - 1|$ converge vers 0, grâce à la remarque 20 de la page 85. ∎

Les trois formules fondamentales énoncées pour les limites finies sont encore valables si l'une ou les deux limites sont infinies à condition que l'opération correspondante sur les limites ait un sens comme le montrent les résultats suivants.

Proposition 5.2.5 (Mélange de limites finies et infinies)**.**

(i) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite* **bornée** *de nombres réels et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$). Alors la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) ; Ceci s'applique en particulier lorsque la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.*

(ii) *Si $\lim_n u_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, et si $\lim_n v_n = +\infty$, alors la suite $\lim_n(u_n \cdot v_n) = +\infty$ si $a > 0$ et $\lim_n(u_n \cdot v_n) = -\infty$ si $a < 0$.*
Lorsque $a = 0$, il s'agit d'une forme indéterminée *: tous les cas sont possibles : une limite nulle, une limite finie positive ou négative, une limite infinie, pas de limites du tout. L'étude dans ce cas doit se faire de façon précise au cas par cas.*

(iii) *Si les suites (u_n) et (v_n) ont des limites infinies de même signe, alors la suite $(u_n + v_n)$ a une limite infinie de même signe.*

(iv) *Si (u_n) et (v_n) ont des limites infinie, alors $(u_n \cdot v_n)$ a pour limite $+\infty$ si les deux suites (u_n) et (v_n) ont des limites de même signe, et pour limite $-\infty$ si les limites de (u_n) et (v_n) sont de signe opposé.*

Remarque 15. *Les résultats précédents montrent que les règles de calcul pour les limites finies s'étendent au cas des limites infinies sous certaines conditions qui peuvent être résumées suivant un tableau. Dans ce tableau, $a \in \mathbb{R}$ (donc fini) et on note ? quand la réponse est indéterminée (c'est à dire dépend des cas).*

u_n	v_n	$u_n + v_n$	$u_n \cdot v_n$	u_n/v_n	v_n/u_n
$a > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
$a < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
$a > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
$a < 0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	?	0	?
0	$-\infty$	$-\infty$	?	0	?

Cependant, en ce qui concerne les deux dernières cases de la colonne de droite du tableau, si $u_n > 0$ avec $\lim_n u_n = 0$, et si $\lim_n v_n = +\infty$, alors $\lim_n(v_n/u_n) = +\infty$, avec les règles évidentes si les signes sont changés). Mais il se peut qu'on aie une suite u_n qui converge vers 0, et v_n qui converge vers $+\infty$, et que v_n/u_n n'aie pas de limite : considérer par exemple le cas où $u_n = (-1)^n/n$ et $v_n = n$.

5.2.3 Passage à la limite dans les inégalités

Voici maintenant des propriétés d'encadrement très utiles dans les calculs de limites. Ces propositions résultent facilement des définitions.

On notera $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, où $-\infty$ et $+\infty$ sont deux nouveaux éléments représentant les limites infinies avec la relation d'ordre suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$.

Proposition 5.2.6 (Principe de conservation des inégalités larges). *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites avec* $\lim_n u_n = a$ *et* $\lim_n v_n = b$*,*

Supposons qu'il existe un rang $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \geq p$*. Alors on a* $a \leq b$*.*

Démonstration. — Supposons que les limites a et b sont finies (les autres cas sont similaires et laissés aux lecteurs à titre d'exercice).

Commençons par le cas où $u_n = 0$ pour tout n. Dans ce cas $a = 0$ et il nous faut démontrer que $b \geq 0$.

Supposons $b < 0$, et choisissons dans la définition de la convergence de b_n $\varepsilon = -b/2$. Il existe donc N tel que si $n \geq N$, on aie $|v_n - b| \leq -b/2$, et pour un tel n, on a $v_n \leq b - b/2 = b/2 < 0$. Ceci est impossible par hypothèse si $n \geq p$.

Le cas général se ramène à celui-ci en considérant la suite $v_n - u_n$.

∎

Attention Une erreur fréquente consiste à affirmer que, si $u_n < v_n$ et $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$, alors $a < b$. C'est évident faux : prendre $u_n = 0$ et $v_n = 1/n$. Dans ce cas, on peut seulement conclure que $a \leq b$. **Le principe de passage à la limite dans les inégalités n'est pas valable pour les inégalités strictes.**

Proposition 5.2.7 (Principe des gendarmes). *Soient* (u_n) *une suite de nombres réels et* $\ell \in \mathbb{R}$*. On suppose qu'il existe deux suites de nombres réels* (a_n) *et* (b_n) *et un entier* $p > 1$ *tels que pour tout* $n \geq p$ *on ait* $a_n \leq u_n \leq b_n$*. Alors*

(i) Si $\lim_n a_n = \ell = \lim_n b_n$ *alors* $\lim_n u_n = \ell$

(ii) Si $\lim_n a_n = +\infty$*, alors* $\lim_n u_n = +\infty$*. (Dans ce cas, la suite* b_n *ne sert à rien : on peut choisir* $b_n = u_n$*).*

(iii) Si $\lim_n b_n = -\infty$*, alors* $\lim_n u_n = -\infty$*. (Avec la même remarque : la suite* a_n *ne sert à rien)*

Démonstration. — Nous ne traitons que le cas où ℓ est finie. Les autres cas sont laissés aux lecteurs à titre d'exercice.

La suite $b_n - a_n$ converge vers 0. Mais

$$|u_n - a_n| = u_n - a_n \leq b_n - a_n = |b_n - a_n|.$$

Donc, $u_n - a_n$ converge vers 0 (voir remarque 20 page 85). Or $u_n - \ell = u_n - a_n + a_n - \ell$, et c'est donc la somme de deux suites qui converge vers 0. Elle converge donc vers 0, ce qui veut dire que u_n converge vers ℓ. ∎

Attention, en général, on ne peut passer à la limite dans une inégalité que si on sait que chaque membre de cette inégalité a une limite. Dans le cas du théorème des suites encadrées, c'est le fait que les deux "suites extrêmes" tendent vers la même limite qui implique l'existence de la limite de la suite encadrée.

Exemple. Posons pour $n \geq 1$:

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n^2} = \frac{n}{1+n^2} + \ldots + \frac{n}{n+n^2}.$$

Ainsi u_n est la somme de n termes dont le plus petit est $\frac{n}{n+n^2}$ et le plus grand est $\frac{n}{1+n^2}$. Il en résulte que :

$$\forall n \geq 2,\ n \cdot \frac{n}{n+n^2} < u_n < n \cdot \frac{n}{1+n^2}.$$

Posons $a_n = \frac{n^2}{n+n^2}$ et $b_n := \frac{n^2}{1+n^2}$. On montre facilement (exercice !) que $\lim_n a_n = 1 = \lim_n b_n$. Comme $a_n < u_n < b_n$ pour tout $n \geq 1$, on en déduit grâce au principe des gendarmes que $\lim_n u_n = 1$.

5.3 Suites monotones

Dans les exemples de suites convergentes que nous avons rencontrés jusqu'à présent, il était facile de deviner à priori la limite de la suite considérée. Pour le justifier, il suffisait d'appliquer la définition en utilisant quelques règles élémentaires de calcul des limites.

L'utilisation de la définition pour démontrer qu'une suite converge suppose que l'on en connaisse la limite à l'avance, ce qui n'est pas toujours le cas.

Il est donc fort souhaitable de trouver des conditions suffisantes (appelés "critères de convergence") permettant de décider qu'une suite converge sans en connaitre a priori la limite.

Le critère le plus simple concerne les suites monotones. Pour énoncer ce critère, donnons quelques définitions.

Définition. *Soit (x_n) une suite de nombre réels.*

(i) On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante *(resp.* strictement croissante*) si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n < x_{n+1}$).*

(ii) On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante *(resp.* strictement décroissante*) si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \geq x_{n+1}$ (resp. $x_n > x_{n+1}$).*

(iii) On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone *(resp.* strictement monotone*) si elle est soit croissante (resp. strictement croissante), soit décroissante (resp. strictement décroissante).*

Remarque 16. *Si une suite est croissante, alors pour tous $n \leq p$, $x_n \leq x_p$. Cela se voit immédiatement par récurrence sur p. Il y a bien sûr une propriété identique pour les suites décroissantes.*

Rappelons que nous avons déjà défini ce que veut dire suite majorée ou minorée (définition 5.2.1 page 89).

Dire qu'une suite $x = (x_n)$ est majorée revient à dire que l'ensemble $x(\mathbb{N}) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ (c'est à dire l'ensemble des valeurs prises par la suite, ou bien l'ensemble image $x(\mathbb{N})$ par la suite si l'on se rappelle qu'une suite x est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$) est un ensemble majoré.

On peut maintenant énoncer le résultat fondamental suivant qui est une conséquence simple de la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$.

Théorème 5.3.1 (Critère de convergence des suites monotones)**.**

(i) Si (x_n) est une suite croissante majorée, elle converge (avec une limite finie).

(ii) Si (x_n) est une suite croissante non majorée, alors $\lim_n x_n = +\infty$.

(iii) De même, une suite décroissante et minorée converge dans $\mathbb{R}$.

(iv) Une suite décroissante et non minorée converge vers $-\infty$.

Démonstration. —

Nous ne traitons que les deux premiers points, les deux autres s'en déduisant en changeant x_n et $-x_n$.

Commençons par le cas où la suite $x = (x_n)$ est croissante majorée. Nous savons que l'image $x(\mathbb{N})$ de la suite est un ensemble non vide et majoré. Il admet une borne supérieure M. Nous allons montrer que $\lim_n x_n = M$.

Tout d'abord, par définition, nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq M$.

Ensuite, par la propriété de la borne supérieure de la proposition 13 de la page 72, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $x_N \geq M - \varepsilon$. Alors, pour $n \geq N$, nous avons, puisque la suite (x_n) est croissante,

$$M - \varepsilon \leq x_N \leq x_n \leq M,$$

et donc $|x_n - M| = M - x_n \leq \varepsilon$. La suite converge donc bien vers M.

Passons au cas où x est non majorée. cela veut dire que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un élément x_N de la suite tel que $x_N \geq A$. Alors, pour $n \geq N$, nous avons

$$x_n \geq x_N \geq A,$$

et nous avons bien montré que la suite (x_n) converge vers $+\infty$ ∎

Remarque 17. *La démonstration du théorème nous en apprend un peu plus : si une suite est croissante et majorée, sa limite est sa borne supérieure.*

Donnons des exemples qui illustrent ce théorème.

Exemples.

(I) (Un cas de convergence).

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie pour $n \geq 1$ par :

$$x_n := 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

(i) Il est clair que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante puisque $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, pour tout $n \geq 1$.

(ii) Montrons qu'elle est majorée. En effet on vérifie facilement par récurrence l'inégalité suivante :

$$\forall n \geq 1, \quad n! \geq 2^{n-1}.$$

Il en résulte que pour tout $n \geq 1$, on a $x_n \leq 1 + \frac{1}{1} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + 2 = 3$.

Il en résulte que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge et que sa limite notée e vérifie les inégalités $2,5 < e \leq 3$.

(II) (Un cas de divergence).

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par la formule suivante :

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Nous allons montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

(i) La suite $(u_n)_n$ est (strictement) croissante puisque $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1) > 0$ pour tout $n \geq 1$.

(ii) Montrons qu'elle n'est pas majorée. En effet, observons d'abord que si $n \geq 1$ et $p \geq 1$, alors
$$u_{n+p} - u_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{p}{n+p},$$
puisque cette expression est la somme de p termes dont le plus petit est $1/(n+p)$. Par suite $u_{2n} - u_n \geq 1/2$ pour tout $n \geq 1$ et en particulier on a :
$$\forall k \geq 1, \quad u_{2^k} - u_{2^{k-1}} \geq \frac{1}{2}.$$
En fixant un entier $p \geq 2$ et en additionnant membre à membre les p inégalités obtenues pour $k = 1, 2, \cdots, p$ on obtient :
$$\forall p \geq 2, \quad (u_2 - u_1) + \cdots + (u_{2^p} - u_{2^{p-1}}) \geq \frac{p}{2}.$$
Les termes se simplifient deux à deux par "téléscopage" et l'on obtient $u_{2^p} - u_1 \geq p/2$ pour tout $p \geq 2$ et donc $u_{2^p} \geq 1 + p/2$ pour tout $p \geq 2$, ce qui prouve que la suite (u_n) n'est pas majorée. Par conséquent d'après le théorème précédent, elle tend vers $+\infty$ i.e.
$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

5.4 Suites adjacentes

Le théorème suivant est très intuitif et repose sur le critère de convergence des suites monotones.

Théorème 5.4.1 (Théorème des suites adjacentes)**.** *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et (b_n) deux suites de nombres réels telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n. \tag{5.2}$$

Alors les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des nombres réels α et β respectivement qui vérifient les inégalités suivantes :
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n.$$
Si de plus $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, *alors $\alpha = \beta$.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du critère des suites monotones. (a_n) est croissante par définition, et majorée par b_1. De même, (b_n) est décroissante et minorée par a_1. Elles convergent donc toutes les deux, et le principe de conservation des inégalités nous donne $\alpha \leq \beta$. ∎

Si les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les inégalités (5.2) et si $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, on dira que ce sont des *suites adjacentes*. Le théorème affirme en particulier que deux suites adjacentes convergent vers une même limite, donnant ainsi naissance à un nombre réel ℓ dont $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'approximants par défaut et (b_n) est une suite d'approximants par excès.

Remarque.
Les hypothèses faites dans ce théorème traduisent le fait géométrique que les segments de la droite réelle à savoir $I_n := [a_n, b_n]$ pour $n \in \mathbb{N}$, forment une suite de *segments emboîtés* les uns dans les autres i.e. $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in N$ (faire un dessin). La conclusion affirme que ces segments ont une intersection qui est encore un segment et que celui-ci est réduit à un point dans le cas où les longueurs des segments (I_n) deviennent infiniment petites lorque n devient grand. En raison de cette propriété géométrique, on appelle également ce théorème le *théorème des segments emboîtés.*

Nous avons déja vu que le procédé de dichotomie appliqué à l'approximation de $\sqrt{2}$ donnait naissance à de telles suites. Donnons maintenant un autre exemple intéressant illustrant cette situation.

Exemple. [Le nombre réel e est irrationnel] Posons pour $n \geq 1$:

$$a_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \ldots + \frac{1}{n!}, \quad b_n := a_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Nous allons démontrer que ces deux suites sont adjacentes et convergent vers un nombre réel *irrationnel* noté e en l'honneur du fameux mathématicien L. Euler : c'est la base du logarithme neperien.

(i) La suite (a_n) est strictement croissante. En effet $a_{n+1} - a_n = 1/(n+1)! > 0$ pour tout $n \geq 1$.

(ii) La suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante. En effet pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= a_{n+1} - a_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{n!}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}) \\ &= -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

(iii) Il est clair que $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. D'après le théorème des suites adjacentes, on en déduit qu'il existe un nombre réel, noté e tel que :

$$e := \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Ce nombre réel, appelé le nombre d'Euler, satisfait à l'encadrement suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{nn!}. \tag{5.3}$$

(iv) Montrons que le nombre réel e est irrationnel i.e. $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On raisonne par l'absurde en supposant le contraire à savoir que e est rationnel. Dans ce cas, il existe deux entiers naturels $p \geq 1$ et $q \geq 1$ premiers entre eux tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n < \frac{p}{q} < a_n + \frac{1}{nn!}.$$

Prenons $n = q$ et multiplions les deux membres par $q \cdot q!$. On observe que par sa définition, $q \cdot q! a_q \in \mathbb{N}$, et en posant $N := qq! a_q$ on obtient $N < p < N + 1$, ce qui est absurde.

Les inégalités (5.3) permettent de donner une valeur approchée de e avec une majoration précise de l'erreur d'approximation. En effet on a :

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n\ n!}, \forall n \geq 1.$$

Ainsi pour obtenir une valeur approchée de e à 10^{-8} près par exemple, il suffit de choisir un entier n (le plus petit possible) tel que $n\ n! > 10^8$. Il est facile de vérifier que $n = 10$ suffit et qu'alors en calculant $a_{10} = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{10!}$, on en déduit que $e \simeq 2,71828182\cdots$ à 10^{-8} près par défaut, ce qui signifie que $2,71828182 < e < 2,71828183$, autrement dit $e = 2,71828182\ldots$, les sept premières décimales obtenues étant exactes.

Note historique : L'irrationnalité du nombre réel e a été démontrée au 18^{eme} siècle par Leonhard Euler (1707-1783) et Johann Heinrich Lambert $(1728 - 1777)$. Cela signifie que e n'est pas solution d'une équation linéaire (i.e. équation algébrique de degré 1) $ax + b = 0$ à coefficients entiers $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$. Plus tard vers 1844, Joseph Liouville démontre que e n'est pas solution d'une équation quadratique (i.e. équation algébrique de degré 2) $ax^2 + bx + c = 0$ à coefficients entiers $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ et conjecture que e est un nombre *transcendant* dans le sens où il n'est solution d'aucune équation algébrique $a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0 = 0$ à coefficients entiers $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0$. Cette conjecture a été démontrée vers 1873 par Charles Hermite $(1822 - 1901)$.

5.5 Développement décimal d'un nombre réel

Nous avons l'habitude de représenter les nombres réels par leur développement en base 10 (leur écriture décimale). Nous avons déjà vu ce que signifie la représentation décimale d'un entier naturel. Mais dans ce cas, l'écriture n'a qu'un nombre fini de termes. Lorsqu'on écrit l'écriture décimale d'un réel (par exemple celle de 1/3 que nous avons vue page 83), il s'agit en fait d'écrire une suite dont le nombre que l'on représente est une limite. Cette écriture décimale, lorsqu'on l'arrête à un nombre fini de termes (disons n décimales après la virgule), donne une valeur approchée du nombre à 10^{-n} près. Par exemple, à 10^{-9} près, $\sqrt{2} \simeq 1,414213562$, $e \simeq 2,718281828$ et $\pi \simeq 3,141592654$.

Rappelons que si nous écrivons un nombre x en base 10 sous la forme

$$x = \pm c_k c_{k-1} \cdots c_0, d_1 d_1 \ldots d_p,$$

cela signifie que

$$x = (\pm 1)(c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \ldots c_0 + d_1 10^{-1} + \ldots d_p 10^{-p}).$$

En d'autres termes, s'il y a p décimales après la virgule, $10^p x \in \mathbb{N}$, et le nombre entier que l'on obtient en décalant la virgule de p places vers la droite est l'écriture décimale de l'entier $10^p x$. Si les c_i et les d_i sont des chiffres compris entre 0 et 9, alors cette écriture de $10^p x$ est unique (comme nous l'avons vu dans le chapitre d'arithmétique, page 44).

Les nombres décimaux, nous l'avons déjà dit, sont ceux qui ont une écriture décimale avec un nombre fini de termes après la virgule. Ce sont des nombres rationnels d'après ce que l'on vient de voir (et des nombres rationnels d'un type très particulier : 1/3 n'en est pas un).

Ce que nous allons voir, c'est que toute écriture décimale "illimitée" définit bien un nombre réel unique, et que tout nombre réel admet une écriture décimale, *presque unique*.

Commençons par démontrer que toute écriture décimale définit bien un nombre réel.

Proposition 22.

(i) Soit $(d_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers prenant les valeurs $0, 1, \ldots, 9$. Alors la suite

$$x_n = d_1 10^{-1} + \ldots + d_n 10^{-n} = \sum_{k=1}^{n} d_k 10^{-k}$$

converge en croissant vers un nombre réel x, qu'on écrit par convention

$$0, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots$$

On note aussi par convention la limite $\sum_{k=1}^{\infty} d_k 10^{-k}$.

(ii) Soit x un nombre réel positif. Il existe un entier P et une suite d'entiers $(d_k)_{k\geq 1}$ avec $d_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ tels que

$$x = P + \sum_{k=1}^{\infty} d_k 10^{-k}.$$

(iii) Cette suite d'entiers (d_k) est unique à condition de supposer que tous les d_i ne sont pas égaux à 9 à partir d'un certain rang, c'est à dire que,

$$\forall k,\ \exists k' \geq k,\ d_k \neq 9.$$

Une telle écriture est appelée l'écriture décimale propre de x.

Démonstration. — Commençons par le premier point. La suite x_n est croissante. Il nous suffit de montrer qu'elle est majorée. On va montrer que $x_n \leq 1$. En majorant chaque d_i par 9, on obtient

$$x_n \leq 9 \times 10^{-1} + \ldots + 9 \times 10^{-n} = 9 \times 10^{-1}\big(1 + 10^{-1} + \ldots + 10^{-(n-1)}\big) = \frac{9}{10}\frac{1 - 10^{-n}}{1 - 10^{-1}}.$$

Cette dernière quantité est elle même majorée par

$$\frac{9}{10}\frac{1}{1 - 10^{-1}} = 1.$$

Pour le second point, on se ramène tout d'abord à $x \in [0, 1[$ et $P = 0$ en remplaçant x par $x - [x]$, où $[y]$ désigne la partie entière du réel y.

Ensuite, considérons $K_n = [10^n x]$, et écrivons son écriture décimale unique

$$K_n = d_{n-1} d_{n-2} \ldots d_1 = \sum_{k=0}^{n-1} d_{n-p} 10^p.$$

On pose alors $x_n = 10^{-n} K_n$, dont l'écriture décimale est $0, d_1 \ldots d_{n-1}$. On a

$$10^n x - 1 < K_n \leq 10^n x,$$

d'où

$$x - 10^{-n} \leq x_n \leq x,$$

ce qui montre que (x_n) converge vers x par le principe des gendarmes.

Le dernier point est un peu plus technique. Il est important de remarquer que pour certains réels, l'écriture décimale n'est pas unique. Par exemple, $0, 99999 \ldots 9 \ldots = 1$, car le calcul que nous avons fait dans la démonstration du premier point nous dit que, si l'on écrit $0, 9 \ldots 9$ avec n décimales, alors le résultat vaut $1 - 10^{-n}$, et cette suite converge vers 1. On voit donc bien que le nombre 1 a deux écritures décimales possibles. On ferait de même avec $0,1 = 0,0999\ldots$, ou $0,5 = 0,499999\ldots$.

De façon générale, les nombres décimaux (ceux dont l'écriture décimale n'a qu'un nombre fini de termes) vont avoir deux écritures décimales possibles.

En fait, si, dans l'écriture décimale, tous les d_i sont égaux à 9 à partir de $i = n_0 + 1$, et que $d_{n_0} \neq 9$, alors on peut remplacer d_{n_0} par $d_{n_0} + 1$ et, pour $i \geq n_0 + 1$, tous les d_i par 0 : on obtiendra la même limite.

Ce qu'on veut voir, c'est que c'est le seul cas possible : seuls les nombres décimaux ont une écriture décimale qui n'est pas unique. Par ailleurs, l'écriture décimale propre d'un nombre réel est unique. On va le voir pour l'écriture de réels de l'intervalle $[0,1]$.

Plus précisément, nous voulons voir que si $x = \sum_{k=1}^{\infty} d_k 10^{-k}$ et que cette écriture décimale est propre, alors pour tout k, d_k est parfaitement déterminé. Remarquons tout d'abord, pour un $x \in [0,1]$ qui s'écrit $0, d_1 \ldots d_k \ldots$, si l'un des d_i est strictement inférieur à 9 alors $x < 1$. En effet, si i est le premier indice tel que $d_i \leq 8$, $x + 10^{-i} \leq 0,999\ldots$, et donc $x \leq 1 - 10^{-i} < 1$.

Considérons alors $y_k = 10^k x$: on écrit en écriture décimale

$$y_k = d_1 10^{k-1} + \ldots d_k + \sum_{p=1}^{\infty} d_{k+p} 10^{-p}.$$

Regardons le dernier terme

$$z_k = \sum_{p=1}^{\infty} d_{k+p} 10^{-p} = 0, d_{k+1} d_{k+2} \ldots.$$

Il a une écriture décimale propre, et donc il est dans l'intervalle $[0,1[$. On en déduit que $y_k - z_k = [y_k]$, et $d_1 \ldots d_k$ est l'écriture décimale du nombre entier $[y_k]$. Cette écriture décimale est unique, comme celle de tout nombre entier, et donc les $d_1, \ldots, d_k$ sont uniques (ce sont les éléments de l'écriture décimale de $[10^k x]$). Puisqu'on peut faire ceci pour tout k, on voit que l'écriture décimale propre est unique. ∎

Remarque 18. *Ce qu'on a fait avec l'écriture décimale (en base* 10*), peut bien évidement se faire avec une base b quelconque. L'écriture décimale propre dans ce cas revient à demander que tous les chiffres ne soient pas égaux à $b - 1$ à partir d'un certain rang.*

L'écriture décimale des nombres rationnels

Nous avons vu plus haut que les nombres rationnels ont une écriture décimale périodique à partir d'un certain rang, c'est à dire qu'à partir d'un certain rang, la suite de ses chiffres se répète. On le voit en regardant comment on obtient cette écriture décimale, ce qu'on a tous appris à l'école primaire en "posant la division". Sin nous voulons le comprendre de façon plus mathématique, cela revient à tout d'abord extraire la partie entière de p/q à l'aide de la division euclidienne, puis à se ramener au cas où $p < q$. Lorsque $1 < q < 10$, on pose $d_1 = [10p/q] \in \{1, \ldots, 9\}$, puis $\{d_1\} = 10p/q - [d_1]$ (le reste) et ensuite $d_2 = [10\{d_1\}/q]$, $\{d_2\} = 10d_1/q - d_2$, et on itère le processus, ce qui nous donne les décimales $d_1, d_2, \ldots$. Comme les d_i ne peuvent prendre que 10 valeurs différentes, au bout d'un certain temps, on va trouver deux fois la même valeur pour d_i, c'est à dire que pour un certain p, $d_i = d_{i+p}$. Alors, on aura $d_{i+1} = d_{i+p+1}$, $\ldots$, et on voit alors que l'écriture décimale est périodique à partir d'un certain rang.

Si on prend un dénominateur p plus grand, $10^k < p < 10^{k+1}$, alors on fait la même procédure, mais en multipliant à chaque étape par 10^{k+1}, ce qui revient à écrire à chaque étape des paquets de k décimales. On voit ainsi que, pour pour un nombre rationnel, l'écriture décimale est périodique à partir d'un certain rang. (Il y a d'autres façons de le voir).

Réciproquement, si l'écriture décimale d'un réel est périodique à partir d'un certain rang, alors le nombre est rationnel. En effet, supposons qu'il existe un entier n et un entier k tels que, pour tout $i \geq n$ on aie $d_{i+k} = d_i$. Dans ce cas, le nombre x est tel que $10^n x$ a ses décimales après la virgule périodiques de période k. Cela signifie qu'en appelant $N = [10^n x]$, le réel $y = 10^n x - N$ est tel que $10^k y = [10^k y] + y$. En appelant $Q = [10^k y]$, on obtient ainsi

$$10^k (10^n x - N) = Q + 10^n x - N,$$

ou encore $10^n x (10^k - 1) = Q + N(10^k - 1)$, ou encore

$$x = \frac{Q + N(10^k - 1)}{10^n (10^k - 1)}.$$

On voit donc bien que x est rationnel.

Réciproquement, si nous voulons voir directement (c'est à dire sans passer par l'algorithme de la division) que l'écriture décimale d'un nombre rationnel est périodique, alors cela revient à dire qu'on peut écrire

$$\frac{p}{q} = \frac{Q + N(10^k - 1)}{10^n(10^k - 1)},$$

c'est à dire qu'on peut écrire le dénominateur q sous la forme $10^n(10^k - 1)$, ou encore qu'il existe n et k tels que $10^n(10^k - 1)$ est congru à 0 modulo q, ce qui permettra d'écrire, pour un certain $m \in \mathbb{N}$, $mq = 10^n(10^k - 1)$ (voir l'exercice 132. On peut alors écrire

$$\frac{p}{q} = \frac{mp}{mq} = \frac{mp}{10^n(10^k - 1)}.$$

On écrit ensuite la division euclidienne de mp par $10^k - 1$, et on obtient ainsi la forme cherchée de p/q.

On peut faire de même dans n'importe quelle base b.

Exercice 132. (**) Soient b et q deux entiers. Montrez qu'il existe deux entiers p et k tels que $b^n(b^k - 1)$ est congru à 0 modulo q. En déduire que l'écriture de n'importe quel rationnel p/q en base b est périodique à partir d'un certain rang.

5.6 Complément : Deux théorèmes fondamentaux

Nous ne nous servirons pas beaucoup des résultats qui suivent dans la suite de ce cours, mais ils jouent un rôle central dans de nombreux pans des mathématiques.

Le premier concerne les suites bornées

Théorème 5.6.1 (De Bolzano-Weierstrass). *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. — Soit x_n une suite bornée, à valeurs par exemple dans l'intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. Quitte à remplacer u_n par $\frac{u_n - a}{b - a}$ qui est à valeurs dans $[0, 1]$, on peut supposer que $a = 0$ et $b = 1$.

Nous allons procéder par dichotomie, comme dans l'exemple de la page **??**.

Coupons l'intervalle $I = [0, 1]$ en 2 parts égales : $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$. L'un au moins de ces intervalles contient une infinité de points de la suite : appelons le I_1. Il est de longueur $1/2$. Coupons à nouveau I_1 en deux parts égales. L'un au moins de ces deux nouveaux intervalles contient une infinité de points de la suite. Appelons le I_2 et recommençons. On construit ainsi par récurrence une suite d'intervalles $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n$ qui contiennent chacun une infinité de points de la suite. La longueur de I_n vaut $1/2^n$ (on a coupé n fois en 2).

Choisissons alors n_1 tel que $x_{n_1} \in I_1$. Il existe $n_2 > n_1$ tel que $x_{n_2} \in I_2$. On recommence l'opération, et on construit ainsi par récurrence $n_{k+1} > n_k$ tel que $x_{n_k} \in I_k$ (c'est possible justement parce que I_k contient une infinité de points de la suite). Appelons $I_k = [a_k, b_k]$. On a $b_n - a_n = 2^{-n}$ et $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$. D'après le théorème des intervalles emboités, a_k et b_k convergent vers la même limite, et par le théorème des gendarmes, il en va de même de x_{n_k} : on a bien construit une sous-suite convergente.

∎

Le deuxième résultat fondamental est le critère de Cauchy. A part le résultat sur les suites monotones, c'est l'un des rares résultats dont nous disposions qui permet d'affirmer l'existence d'une limite sans la connaître. Mais il est beaucoup plus puissant que le résultat sur les suites monotones, car il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante.

Nous commençons par une définition

Définition. *Soit (x_n) une suite de nombres réels. Nous dirons que (x_n) est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n, p \geq N,\ |x_n - x_p| \leq \varepsilon.$$

Remarque 19. *Remarquons tout de suite qu'une suite de Cauchy est bornée. En choisissant $\varepsilon = 1$, nous trouvons un N tel que, si $n, p \geq N$, on a $|x_n - x_p| \leq 1$. En particulier, si $n \geq N$, $|x_n - x_N| \leq 1$. Alors, $|x_n| \leq |x_N| + 1$, et la suite (x_n) est bornée par*

$$\max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_N|, |x_N| + 1\}.$$

Remarque 20. *Une suite convergente est de Cauchy : en effet, si $\lim_n x_n = \ell$, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un N tel que si $n \geq N$, alors $|x_n - \ell] \leq \varepsilon/2$. Dans ce cas, en écrivant*

$$|x_n - x_p| \leq |x_n - \ell| + |x_p - \ell|,$$

on voit que si n et p sont supérieurs à N, alors $|x_n - x_p| \leq \varepsilon$. La suite est donc bien de Cauchy.

Le théorème fondamental est le suivant

Théorème 5.6.2 (Critère de Cauchy). *Toute suite de Cauchy est convergente.*

Démonstration. — Si (x_n) est de Cauchy, elle est bornée. Elle admet donc une sous-suite convergente, soit (x_{n_k}) qui converge vers ℓ.

Montrons alors que x_n converge vers ℓ. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un k_0 tel que, si $k \geq k_0$, $|x_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon/2$.

Maintenant, puisque (x_n) est de Cauchy, il existe un N, tel que si $n, p \geq N$, $|x_n - x_p| \leq \varepsilon/2$. Choisissons alors $k \geq k_0$ tel que $n_k \geq N$. Pour $n \geq n_k$, on a

$$|x_n - \ell| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

C'est bien ce qu'on voulait démontrer.

∎

Remarque 21. *La notion de suite de Cauchy n'est pas si facile à comprendre. Formellement, cela veut dire que les distances mutuelles entre deux points de la suite deviennent petites quand n grandit, mais ceci* de façon uniforme, *c'est à dire d'une façon qui ne dépend que de n, mais pas de p et q plus grands que n.*

Après tout, puisqu'une suite est de Cauchy si et seulement si elle est convergente, pourquoi introduire une nouvelle notion ? La réponse (autre que le plaisir d'ennuyer les étudiant(e)s en les noyant sous des notions nouvelles) est que dans la pratique, il sera parfois plus facile de vérifier qu'une suite est de Cauchy que de démontrer qu'elle converge : c'est un critère pour assurer qu'une suite converge. On en verra une application dans le cadre des suites récurrentes : théorème 5.7.3, page 107.

Remarque 22. *Puisqu'une suite de Cauchy (x_n) est bornée, pour tout n, l'ensemble $A_n = \{|x_p - x_q|,\ p, q \geq n\}$ est un ensemble majoré. Si l'on appelle $S_n = \sup(A_n) \geq 0$, dire que la suite est de Cauchy revient à dire que la suite (S_n) converge vers 0 lorsque $n \to \infty$. Remarquons que (S_n) est décroissante (car $A_{n+1} \subset A_n$), et pour qu'elle converge vers 0, il suffit qu'elle admette une sous-suite qui converge vers 0.*

Remarque 23. *Si (x_n) est une suite bornée, on peut aussi considérer l'ensemble majoré*

$$B_n = \{[x_n - x_p|,\ p \geq n\} \subset A_n.$$

On peut alors aussi considérer sa borne supérieure : $s_n = \sup(B_n) \geq 0$. Puisque $B_n \subset A_n$, alors $s_n \leq S_n$. Mais par ailleurs, on a, pour $p, q \geq n$

$$|x_p - x_q| \leq |x_p - x_n| + |x_q - x_n| \leq 2s_n.$$

Si bien que $S_n \leq 2s_n$. Ces deux encadrements nous montrent que $\lim_n S_n = 0$ si et seulement si $\lim_n s_n = 0$. Donc, une suite est de Cauchy si et seulement si $\lim_n s_n = 0$. Remarquons que contrairement à (S_n), (s_n)n'est pas nécessairement décroissante. Mais grâce à l'encadrement précédent, il suffit pour elle aussi d'avoir une sous-suite convergent vers 0 pour converger vers 0.

5.7 Suites récurrentes

Il est assez rare dans les applications qu'une suite soit donnée par une "formule explicite" permettant d'en calculer la limite. Nous allons étudier ici les suites données par un "procédé itératif" dans lequel on connait le premier terme x_0 de la suite et une relation de récurrence :

$$(R) \qquad x_{n+1} = f(x_n),\ n \in \mathbb{N}$$

permettant de calculer le terme x_{n+1} à partir du terme précédent x_n à l'aide d'une même fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Une telle relation, dite relation de récurrence d'ordre 1, permet de calculer tous les termes de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de proche en proche par récurrence à partir du premier terme x_0. En effet, connaissant le premier terme $x_0 \in I$, on peut calculer le terme suivant x_1 à partir de $x_0 \in I$ en appliquant la formule (R) pour $n = 0$, d'où $x_1 = f(x_0)$.

Connaissant le terme x_1, on peut alors calculer le terme suivant x_2 grâce à la relation de récurrence (R) appliquée avec $n = 1$ à condition que $x_1 \in I$, d'où $x_2 = f(x_1)$, et ainsi de suite... connaissant le terme x_n on peut calculer le terme x_{n+1} par la formule $x_{n+1} = f(x_n)$ à condition que $x_n \in I$.

Par conséquent si $x_0 \in I$ et si la fonction f vérifie la condition $x \in I \Longrightarrow y = f(x) \in I$, (c'est-à-dire si $f(I) \subset I$) on peut définir par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unique vérifiant la relation de récurrence (R). On dira que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie par itération successive de x_0 par f.

Il est possible en théorie de déduire de (R) une formule donnant le terme x_n en fonction de n et de x_0. En effet on définit les fonctions itérées de f en posant $f^{(1)} := f$, $f^{(2)} := f \circ f, \ldots,$ $f^{(n+1)} = f^{(n)} \circ f = f \circ f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $x_n = f^{(n)}(x_0)$ pour $n \geq 1$. Cette formule est en général difficilement exploitable car calculer les itérées $f^{(n)}$ de f peut se révéler très compliqué lorsque n devient grand, même si la fonction de départ est assez simple (voir les exemples ci-dessous).

La théorie générale ayant pour objet l'étude du comportement de telles suites en fonction de la valeur initiale x_0 s'appelle les "systèmes dynamiques" et fait l'objet de recherches actuelles très actives. Il n'y a pas de méthode générale pour étudier les suites récurrentes. Nous nous contenterons ici de donner quelques techniques permettant d'étudier des exemples simples : lorsque la fonction f est continue, ou monotone sur l'intervalle où la suite est définie, ou bien lorsqu'elle est "contractante". Nous montrerons aussi comment les suites peuvent être utilisées pour approcher un nombre réel solution d'une équation de la forme $x = f(x)$, où f est une fonction convenable définie et *continue* sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$.

5.7.1 Représentation graphique

Pour étudier une suite définie par la donnée de x_0 et par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, il est souvent utile de construire le graphe de la fonction f. On peut alors construire sur le dessin les premiers termes de la suite ; ils apparaissent naturellement sur la droite déquation $(y = x)$. Le procédé de construction est illustré par la figure suivante, page 103. On place d'abord le point de coordonnées (x_0, x_0) ; la droite verticale passant par ce point rencontre le graphe de f au point de coordonnées $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$. La droite horizontale passant par ce dernier point coupe la bissectrice d'équation $(y = x)$ au point de coordonnées (x_1, x_1). Ces opérations nous ont permis de passer de (x_0, x_0) à (x_1, x_1). Il ne reste plus qu'à répéter l'opération...

5.7.2 Fonctions f continues, points fixes

La notion de continuité des fonctions n'est pas au programme de ce cours. Mais pour comprendre de quoi nous parlons, nous donnons sa définition, qui est directement inspirée de la notion de convergence de suite.

Définition. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction.*

i) Soit $\ell \in I$. On dit que f est continue au point ℓ si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x - \ell| \leq \eta \text{ et } x \in I \Longrightarrow |f(x) - f(\ell)| \leq \varepsilon.$$

ii) On dit que f est continue sur I si $\forall \ell \in I$, f est continue au point ℓ.

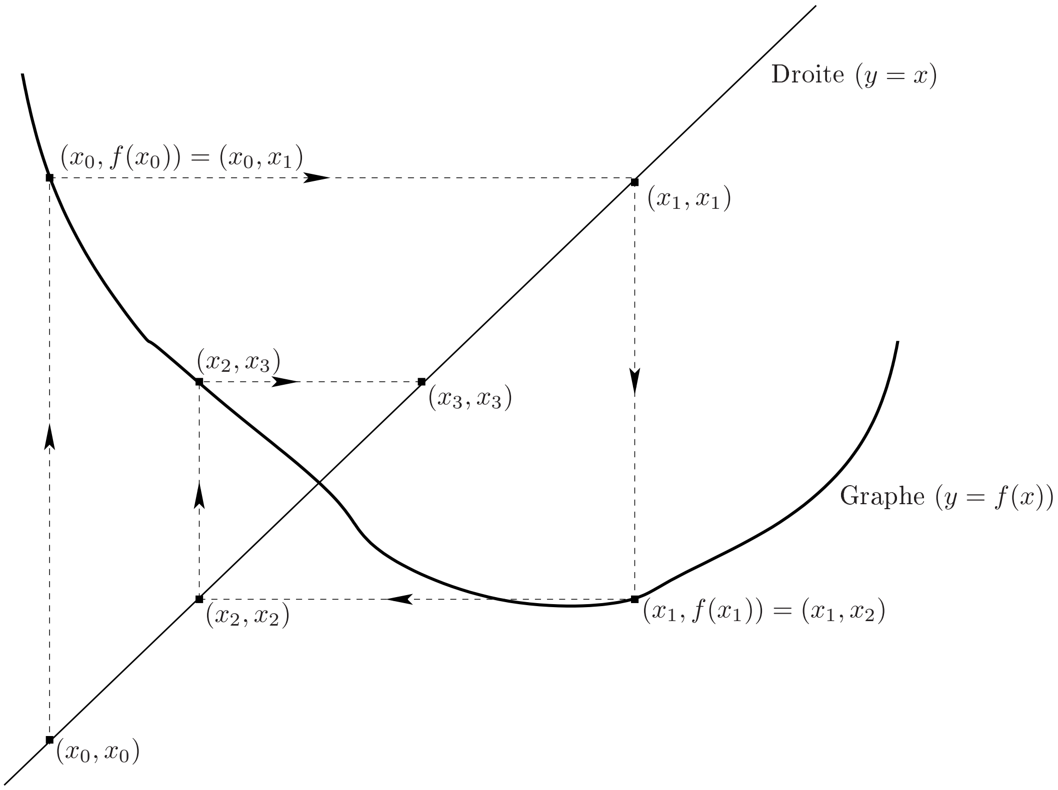

FIG. 5.1 – Construction graphique d'une suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$

En d'autres termes, une fonction est continue au point ℓ si, à condition de choisir x suffisament proche de ℓ, alors $f(x)$ est aussi proche de $f(\ell)$ qu'on le souhaite.

La plupart des fonctions que nous connaissons sont continues. Par exemple

(i) Tous les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$.

(ii) Une fraction rationnelle, de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes, est continue en tout point ℓ où le dénominateur $Q(x)$ ne s'annule pas. Ainsi par exemple $x \mapsto \frac{2x+5}{x-2}$ est continue sur $I =]-\infty, 2[$ et sur $I =]2, +\infty[$

(iii) Les fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\exp(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

(iv) La fonction $\tan(x)$ est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

(v) La fonction $\log(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

(vi) Plus généralement, si $f : I \mapsto J$ et $g : J \mapsto \mathbb{R}$ sont continues sur les intervalles I et J, la fonction $g \circ f : I \mapsto \mathbb{R}$ est continue sur I.

Une conséquence immédiate des définitions est la suivante

Proposition 23. *Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et (x_n) une suite à valeurs dans I. Si (x_n) converge vers ℓ, avec $\ell \in I$, et si f est continue au point ℓ, alors la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(\ell)$.*

Démonstration. — La démonstration de cette proposition est très simple et est laissée à titre d'exercice.

∎

Le lien avec les suites récurrentes est le suivant :

Proposition 24. *Nous considérons un intervalle I et une fonction $f : I \mapsto I$. On choisit $x_0 \in I$ et on définit par récurrence la suite (x_n) par $x_{n+1} = f(x_n)$. Alors, si $\lim_n x_n = \ell \in I$ et si f est continue sur I, ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 23. ∎

Définition. *Un point $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$ s'appelle un point fixe de f. Sur notre construction graphique, un point fixe correspond à un point d'intersection du graphe de f et de la droite d'équation $(y = x)$.*

Exemple. Prenons $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux paramètres réels. La suite x_n est donc définie par une équation de récurrence linéaire

$$x_{n+1} = ax_n + b,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Alors $x_1 = ax_0 + b$, $x_2 = ax_1 + b = a^2x_0 + ab + b$, $x_3 = a^3x_0 + a^2b + ab + b$,... On voit facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = a^n x_0 + a^{n-1}b + \cdots ab + b.$$

Nous voyons déjà que la fonction itérée $f^{(n)}(x)$ est assez compliquée $f^{(n)}(x) = a^n x + b_n$, avec

$$b_n = a^{n-1}b + \cdots ab + b = b(1 + a + \cdots + a^{n-1}) = \begin{cases} b\frac{1-a^{n-1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ nb & \text{si } a = 1 \end{cases}.$$

(i) Observons que si $b = 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** de raison a : $x_n = a^n x_0$.

(ii) Si $a = 1$, on obtient $x_n = x_0 + nb$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est une **suite arithmétique** de raison b dont le comportement dépend simplement de b : si $b = 0$ la suite est constante et converge donc vers x_0 ; si $b \neq 0$, la suite a pour limite $+\infty$ si $b > 0$ et $-\infty$ si $b < 0$.

(iii) Si $a \neq 1$, l'application affine $f(x) = ax + b$ a un point fixe unique $\ell = \frac{b}{1-a}$. Il en résulte que si $x_0 = \frac{b}{1-a}$, la suite (x_n) converge est constante et converge donc vers $\frac{b}{1-a}$.
Si $|a| < 1$, on sait que $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{b}{1-a}.$$

Si $|a| > 1$ et $x_0 \neq \frac{b}{1-a}$, on en déduit que la suite a une limite infinie de même signe $x_0 - \frac{b}{1-a}$.

On peut facilement interpréter géométriquement ces résultats sur un dessin qu'il est conseillé de faire.

Faisons plusieurs remarques importantes sur la proposition 24.

Remarque 24. *Cette proposition nous montre que si l'on connaît f, alors les seules limites possibles de la suite (x_n) sont déterminées par la l'équation $\ell = f(\ell)$. Même si cette équation n'a qu'une solution dans I, cela ne veut pas dire que la suite x_n converge effectivement vers ℓ. Il se peut que la suite ne converge pas, ou bien qu'elle converge vers un point ℓ qui n'est pas dans I, par exemple lorsque l'un des bords de I est à l'infini, ou bien que $I =]a, b[$ et que $\ell = a$.*

Remarque 25. *Le choix de l'intervalle I sur lequel on travaille est très important dans la pratique : il faut bien sûr que $x_0 \in I$, mais surtout que $f(I) \subset I$. On a toujours intérêt à chercher I le plus petit possible, car alors on peut localiser assez bien l'endroit où la suite se trouve, et donc où sont les solutions* *possibles. C'est important par exemple lorsque l'équation $f(\ell) = \ell$ a plusieurs racines : dans ce cas, on peut avoir à chercher un intervalle I qui ne contient qu'une seule de ces racines et qui contienne x_0.*

Par ailleurs, on aura toujours intérêt à chercher pour I un intervalle fermé borné $[a, b]$. En effet, si une suite x_n est à valeurs dans I et si elle converge vers ℓ, alors $\ell \in [a, b]$ par la propriété de conservation des inégalités larges à la limite. Dans ce cas, les seules limites possibles sont dans l'intervalle.

Si l'intervalle est ouvert, alors la limite pourrait se trouver au bord de l'intervalle qui n'est pas dans I

Remarque 26. *Enfin, il n'est pas toujours nécessaire d'avoir $x_0 \in I$. Il suffit que x_1 soit dans I, ou bien qu'au bout d'un certain temps, $x_n \in I$: une fois que la suite est arrivée dans I, elle ne peut plus en sortir.*

5.7.3 Fonctions f monotones

Le comportement des suites récurrentes est assez différent selon que la fonction f sur I est croissante ou décroissante (elle peut bien sûr n'être ni l'un ni l'autre).

Proposition 5.7.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \mapsto I$ une fonction croissante. On suppose que $x_0 \in I$. Alors on a les propriétés suivantes :*

i) Si $f(x_0) > x_0$, la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$ est croissante.

ii) Si $f(x_0) < x_0$, la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$ est décroissante.

iii) Si $f(x_0) = x_0$ la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$est constante.

En particulier, si $I = [a, b]$ est un intervalle fermé et borné, et que f est croissante et continue sur I, la suite (x_n) converge vers une solution $\ell \in I$ de $f(\ell) = \ell$. En particulier, cette équation a nécessairement une solution dans I.

Démonstration. — Puisque f est croissante, pour tout $n \geq 1$, le nombre réel $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1})$ est du signe de $x_n - x_{n-1}$. Donc ce signe est constant. Il est du signe de de $x_1 - x_0 = f(x_0) - x_0$. Par conséquent si $f(x_0) \leq x_0$, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et si $f(x_0) \geq x_0$, la suite est croissante.

Enfin, si $I = [a, b]$, la suite est soit croissante, majorée par b, soit décroissante, minorée par a. Elle converge donc par le résultat fondamental sur les suites monotones, vers une valeur $\ell \in I$. Puisque f est continue sur I, on a $f(\ell) = \ell$. ∎

Exemple. On considère ici la suite définie par son premier terme $x_0 \geq 0$ et la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{9}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Ici on a $x_{n+1} = f(x_n)$, où $f(x) := x^2 + 1/9$. Comme $x_0 \geq 0$, et que, si $x \geq 0$, alors $f(x) \geq 0$, on peut choisir $I = [0, \infty[$. Alors I est fermé et $f(I) \subset I$. Sur cet intervalle, la fonction est croissante et continue sur I. Cherchons ses points fixes. L'équation $f(x) = x$ s'écrit $x^2 - x + 1/9 = 0$. Elle a deux racines positives

$$\ell_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{6}, \ \ell_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{6} \text{ avec } 0 < \ell_1 < \ell_2.$$

D'après la proposition 5.7.1, la suite (x_n) est une suite monotone dans l'intervalle I dont le sens de monotonie dépend du signe de $f(x_0) - x_0$ et en cas de convergence, sa limite vérifie l'équation $f(x) = x$ dans I, c'est à dire que c'est ℓ_1 ou ℓ_2.

Comme $f(x) - x = (x - \ell_1)(x - \ell_2)$, le signe de $f(x_0) - x_0$ dépend de la position relative de x_0 par rapport aux deux points fixes ℓ_1 et ℓ_2.

(i) Si $0 \leq x_0 < \ell_1$, on a $f(x_0) - x_0 > 0$. On sait donc que la suite est croissante.
Par ailleurs, on voit que si $x \leq \ell_1$, alors $f(x) \leq f(\ell_1) = \ell_1$. On en déduit par récurrence que pour tout n, $x_n \leq \ell_1$.
La suite est alors croissante majorée. Elle converge vers ℓ_1 ou bien ℓ_2. Comme $x_n \leq \ell_1$, par passage à la limite, on a aussi $\lim_n x_n \leq \ell_1$, et la limite est donc ℓ_1.

(ii) Si $\ell_1 < x_0 < \ell_2$, on a $f(x_0) - x_0 < 0$ On en déduit que x_n est décroissante. Par ailleurs, par le même argument, on voit que pour tout n, on a $\ell_1 \leq x \leq \ell_2 \Longrightarrow \ell_1 \leq f(x) \leq \ell_2$, et donc on en déduit par récurrence que pour tout n, $\ell_1 \leq x_n \leq \ell_2$. la suite est décroissante minorée : elle converge et la seule limite possible est encore ℓ_1

(iii) Si $x_0 > \ell_2$, on a $f(x_0) - x_0 > 0$, et donc la suite est croissante. On a toujours $x_n \geq x_0 > \ell_2$. Donc, la suite ne peut pas être convergente, car la seule limite possible est ℓ_2, et $\lim x_n \geq x_0 > \ell_2$. Dans ce cas, $\lim_n x_n = +\infty$ (car on sait qu'une suite croissante est soit convergente, ou a une limite égale à $+\infty$).

(iv) Si $x_0 = \ell_1$ ou $x_0 = \ell_2$, la suite x_n est constante.

Remarque 27. *Dans cet exemple, selon la position de x_0 par rapport à ℓ_1 et ℓ_2, nous aurions pu choisir $I = [0, \ell_1]$, ou bien $[\ell_1, \ell_2]$ ou bien $[\ell_2, +\infty[$, qui sont aussi des intervalles tels que $f(I) \subset I$.*

A titre de comparaison, lorsque la fonction est décroissante, la situation est un peu différente. Pour être complets, nous donnons ci-dessous une description de cette situation.

Proposition 5.7.2. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto I$ une fonction décroissante, et on suppose $x_0 \in I$ Alors pour tout $x_0 \in I$, les deux suites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont monotones.*

Si de plus f est continue sur I et si ces deux suites convergent dans I, leurs limites respectives sont des solutions de l'équation $f^{(2)}(x) = x$ dans I, où $f^{(2)} = f \circ f$.

Attention : ne pas confondre $f^{(2)}(x) = f(f(x))$ et $f^2(x) = f(x)^2$.

Démonstration. — En effet puisque f est décroissante sur I et que $f(I) \subset I$, la fonction $g := f^{(2)} = f \circ f$ est une fonction croissante sur I telle que $g(I) \subset I$. En effet, on a, pour $x \leq y$, $f(x) \geq f(y)$, donc $f(f(x)) \leq f(f(y))$.

Si on considère la suite $y_n = x_{2n}$ on voit que $y_{n+1} = x_{2n+2} = f(x_{2n+1}) = f(f(x_{2n})) = g(y_n)$. Donc, la suite y_n est une suite récurrente associée à la fonction $g = f^{(2)}$. On peut alors appliquer la proposition 5.7.1 à la suite y_n.

De la même façon la suite $z_n = x_{2n+1}$ satisfait elle aussi l'équation de récurrence $z_{n+1} = g(z_n)$, et elle est elle aussi monotone. ∎

Remarque 28. *Ce résultat ne dit rien a priori sur la convergence de la suite (x_n) elle même. Cependant, si les deux suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (x_n) elle même converge (voir l'exercice 139). En particulier, si l'intervalle $I = [a, b]$ est fermé borné, et que $g = f^{(2)}$ est continue et n'a qu'un point fixe ℓ sur I, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.*

Exemple. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite récurrente définie par son premier terme $x_0 > 0$ et la relation de récurrence $x_{n+1} := 1 + 1/x_n$ pour $n \geq 0$. Ici, la fonction f est $f(x) = 1 + 1/x$. On peut choisir $I =]0, +\infty[$, intervalle (ouvert) sur lequel la fonction f est continue et décroissante.

Les points fixes de f sont donnés par l'équation $x = 1 + 1/x$. Il n'y en a qu'un seul dans l'intervalle I, qui vaut $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On l'appelle le nombre d'or.

La fonction $g = f^{(2)} = f \circ f$ est une fonction continue croissante sur $]0, +\infty[$. On peut faire le calcul exact, et on obtient

$$g(x) = f(f(x)) = \frac{2x+1}{x+1}, x > 0.$$

Dans ce cas, il nous faut regarder les sous-suites $y_n = (x_{2n})$ et $z_n = (x_{2n+1})$. On remarque que la fonction g prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 2]$. De plus, g est croissante (nous le savions par la proposition 5.7.2) et est continue sur $[0, \infty[$ (intervalle fermé). On voit que y_n et z_n sont bornées, puisque $y_{n+1} = g(y_n)$ et $z_{n+1} = g(z_n)$. Ce sont donc des suites monotones bornées. Par conséquent, elles possèdent des limites finies ℓ_1 et ℓ_2 respectivement, qui sont dans $[0, +\infty[$, et qui doivent être solution de l'équation $g(x) = x$.

Mais le seul point fixe de g dans $[0, \infty[$ est ℓ. Les deux sous-suites (y_n) et (z_n) convergent donc vers la même limite ℓ, et donc la suite (x_n) converge vers $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque 29. *Dans cet exemple, on peut étudier selon les valeurs de x_0 quand les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont croissantes ou décroissantes. Il n'y a pas besoin pour cela de faire le calcul. Si $x_0 < \ell$, alors puisque f est décroissante, on a $x_1 > \ell$. Mais puisque x_{2n} converge vers ℓ, et que sa valeur initiale x_0 est inférieure à ℓ, alors nécessairement elle est croissante. De même, x_{2n+1} est décroissante. Le résultat est inversé si $x_0 > \ell$. Dans ce cas, la limite ℓ est prise en sandwich entre les termes pairs et les termes impairs de la suite.*

5.7.4 Fonctions f contractantes

Lorsque la fonction n'est ni croissante, ni décroissante, nous pouvons toujours exhiber une limite dans certains cas particuliers (cependant très importants). La méthode que nous présentons dans le théorème qui suit s'étend à de très nombreux problèmes en mathématiques.

Théorème 5.7.3. *Soit $f : I \mapsto I$ une fonction définie sur un intervalle fermé $I \subset \mathbb{R}$ (pas nécessairement borné : ce peut être $[a,b]$, $[a,\infty[$, $]-\infty,b]$ ou bien $]-\infty,+\infty[$. Supposons qu'il existe un nombre réel positif $0 < k < 1$ tel que pour tout $x \in I$ et $y \in I$ on ait :*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Alors pour tout $x_0 \in I$ la suite récurrente de premier terme x_0 définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 0$ converge vers un nombre réel $\ell \in I$ vérifiant l'équation $f(\ell) = \ell$. De plus ℓ est l'unique point fixe de de f dans I.

Définition. *Une fonction f définie sur un intervalle I pour laquelle il existe une constante $k < 1$ telle que $|(f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ pour tout couple de points (x,y) dans I^2 est appelée une application* **contractante**. *On dit alors que f est contractante de constante k.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que l'hypothèse faite sur f montre qu'elle est continue sur I (nous laissons cette vérification immédiate aux lecteurs).

Nous étudions tout d'abord le cas simple où nous savons qu'il existe dans I un point fixe ℓ pour f, c'est à dire une solution de $f(\ell) = \ell$. dans ce cas, nous avons

$$|x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)| \leq k|x_n - \ell|.$$

En itérant cete inégalité, on en déduit par récurrence que, pour tout $n \geq 0$,

$$|x_n - \ell| \leq k^n|x_0 - \ell|.$$

Puisque $k < 1$, nous voyons donc que $\lim_n x_n = \ell$.

En fait, la seule hypothèse que f est contractante suffit à assurer l'existence d'un point fixe ℓ. Pour le voir, nous allons utiliser le critère de Cauchy (théorème 5.6.2, page 101).

En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrivons $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})|$ et d'après l'hypothèse sur f, on en déduit que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|.$$

En itérant cette inégalité, on en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0| \tag{5.4}$$

On va montrer qu'alors (x_n) est une suite de Cauchy. Ce qu'il nous faut montrer, c'est que

$$s_n = \sup_{p \geq n} |x_p - x_n|$$

converge vers 0. Il suffit donc de majorer (s_n) par une suite qui converge vers 0.

Soit donc n et $p \geq n$ que nous écrivons $p = n + q$. On a

$$|x_{n+q} - x_n| \leq |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+q} - x_{n+q-1}|.$$

Par la majoration (5.4), on obtient

$$|x_{n+q} - x_n| \leq |x_1 - x_0|\big(k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{n+q-1}\big) = |x_1 - x_0|k^n\big(1 + k + \ldots + k^{q-1}\big).$$

Or,

$$1 + k + \ldots + k^{q-1} = \frac{1-k^q}{1-k} \leq \frac{1}{1-k},$$

et on obtient

$$|x_{n+q} - x_n| \leq k^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-k}.$$

On en déduit que $s_n = \sup_{q\geq 1} |x_{n+q} - x_n|$ est majorée par $k^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-k}$. C'est une suite qui converge vers 0 et la suite est donc de Cauchy. Grâce au théorème 5.6.2 page 101, nous voyons qu'elle converge et puisque f est continue, elle converge vers une limite ℓ telle que $f(\ell) = \ell$.

Il nous reste à voir qu'il ne peut y avoir qu'une seule solution dans I de l'équation $f(\ell) = \ell$. Supposons donc que nous en ayons deux, ℓ_1 et ℓ_2. On a alors

$$|\ell_1 - \ell_2| = |f(\ell_1) - f(\ell_2)| \leq k|\ell_1 - \ell_2|,$$

d'où l'on tire, puisque $k < 1$, que $|\ell_1 - \ell_2| = 0$. ∎

La condition $k < 1$ est absolument fondamentale dans cet énoncé. Dans la démonstration, ce qui est important est de majorer $|x_{n+q} - x_n|$ par une quantité indépendante de q et qui converge vers 0. Ce n'est possible parce que $k < 1$. Par exemple, $k = 1$ ne suffirait pas.

Remarque 30. *Dans la pratique, une fonction est contractante, de constante k, sur I dès qu'elle est dérivable et que sa dérivée sur I est que sa dérivée y est majorée par k. (C'est un conséquence du théorème des valeurs intermédiaires que nous verrons dans un autre cours.)*

Supposons alors que f est dérivable, et que sa dérivée est continue. Si ℓ est une solution de $f(\ell) = \ell$, et que $|f'(\ell)| < 1$, alors il existe un intervalle autour de ℓ, de la forme $I = [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ sur lequel cette fonction dérivée $|f'|$ est majorée par une constante $k < 1$. Alors, dès que la suite (x_n) arrive dans l'intervalle I, la suite va converger vers ℓ. Par contre, ce n'est plus le cas si $|f'(\ell)| > 1$. Dans ce cas, on ne pourra jamais avoir la convergence de (x_n) vers ℓ, à moins qu'il n'existe un entier n_0 pour lequel $x_{n_0} = \ell$ (dans ce cas, la suite reste constante et égale à ℓ à partir de $n = n_0$).

On voit donc que dans la pratique, ce qui importe est la position de $|f'(\ell)|$ par rapport à 1. Dans le premier cas, on dit que ℓ est un **point fixe stable**, *dans le second on dit qu'il est un* **point fixe instable** *(et on se garde bien de dire quoi que ce soit lorsque $|f'(\ell)| = 1$).*

5.7.5 Exemple d'application : l'approximation de $\sqrt{2}$

Nous avons déjà décrit dans l'introduction la méthode de dichotomie pour construire deux suites de nombres rationels approchant par défaut et par excès le nombre irrationnel $\sqrt{2}$. Mais l'algorithme que nous avions donné n'est pas très rapide pour approcher $\sqrt{2}$. Nous allons en donner un autre beaucoup plus efficace. Nous commençons par remarquer que $\sqrt{2}$ est la solution de l'équation

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x}) := f(x).$$

Cette équation n'a qu'une seule solution sur $I =]0, \infty[$, et la fonction f envoie I dans I et est continue sur I. La dérivée de f au point $\sqrt{2}$ est nulle, si bien qu'on est dans un cas où la dérivée de f autour de $\ell := \sqrt{2}$ peut être rendue aussi petite que l'on veut. On va voir que cette propriété va nous permettre de donner une approximation très rapide.

On commence par remarquer que f est décroissante sur $]0, \ell]$, et croissante sur $[\ell, \infty[$. On a aussi

$$f(x) - \sqrt{2} = \frac{1}{2x}(x - \sqrt{2})^2.$$

Donc, dès la première étape, on aura $x_1 > \sqrt{2}$. On voit aussi que si $x - \sqrt{2}$ est petit, par exemple de l'ordre de 10^{-2}, alors $f(x) - \sqrt{2}$ est très petit (inférieur à 10^{-4}). Donc, si x_n est proche de $\sqrt{2}$, x_{n+1} en est encore beaucoup plus proche.

Si $x > \sqrt{2}$, alors $f(x) > \sqrt{2}$ et l'intervalle $[\sqrt{2}, \infty[$ est laissé stable par f. Sur cet intervalle, f est continue et croissante. Aussi, si $x > \sqrt{2}$, alors $f(x) - x = \frac{1}{2}(\frac{2}{x} - x) < 0$. Donc, si $x_0 > \sqrt{2}$ la suite (x_n) est décroissante, minorée par $\sqrt{2}$, et converge donc vers $\sqrt{2}$. Voyons à quelle vitesse.

Si $x_0 = 2$ par exemple, on a $x_0 - \sqrt{2} < 1$. Alors $x_1 - \sqrt{2} = \frac{1}{2x_0}(x_0 - \sqrt{2}) \leq 1/2$. De même, si $x_1 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}$, alors $x_2 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^2}$. On montre ainsi par récurrence que $x_n - \sqrt{2} \leq 2^{1-2^n}$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$. Et si cette propriété est vraie à l'ordre n, on a à l'ordre $n + 1$

$$x_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{2})^2 \leq \frac{1}{2}2^{2(1-2^n)} = 2^{1-2^{n+1}}.$$

Le procédé par dichotomie nous donnait au bout de n étapes une erreur de l'ordre de 2^{-n}, tandis que celui-ci nous donne au bout de n étapes une erreur de l'ordre de 2^{-2^n}, ce qui est considérablement plus petit. Si on calcule explicitement les valeurs de x_n, en partant de $x_0 = 2$, on obtient, avec $\sqrt{2} \simeq 1,414213562$: $x_1 = 1,5$, $x_2 = 1,466666$, $x_3 = 1,414215686$, $x_4 = 1,414213562$.

En 4 étapes, nous avons une écriture décimale approchée exacte à 9 décimales près ! Avec le procédé de dichotomie, il nous avait fallu 10 étapes pour obtenir 3 décimales.

Exercice 133. Donnez une méthode similaire pour approcher $\sqrt{a}$.

La méthode utilisée ici pour déterminer une valeur approchée de la racine carrée porte le nom de "méthode de Héron"'. C'est un cas particulier d'une méthode plus générale, dite "méthode de Newton" qui permet de déterminer une approximation de la solution de certaines equations du type $F(x) = 0$. La méthode de Newton consiste, pour trouver une valeur approchée de la solution à $F(x) = 0$, à écrire une suite récurrente qui remplace x_n par l'intersection de la tangente à la courbe $y = F(x)$ au point x_n avec l'axe $\{y = 0\}$. Dans ce cas précis, avec $F(x) = x^2 - 2$, l'équation de la tangente au point x_n est $Y - (x_n^2 - 2) = 2x_n(X - x_n)$, et l'intersection avec l'axe des X est donné en faisant $Y = 0$, c'est à dire en remplaçant x_n par la solution X de l'équation obtenue, c'est à dire

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}).$$

Exercices sur le chapitre 5

Exercice 134. Etudier la convergence des suites définies pour $n \geq 1$ par

$$a_n = 2 - \frac{5}{n}, \quad b_n = 1 - n^2, \quad c_n = (-1)^n, \quad d_n := (1/n)\sin(2\pi n/3), \quad e_n = \frac{(-1)^{n^2}}{n}.$$

Exercice 135. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} (n^\alpha - n),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Exercice 136. Calculer les limites des suites défines pour n assez grand par les formules suivantes :

$$x_n := \frac{3n^3 - 5n^2 - 7}{2n^3 - 8n - 11}, \; y_n := \frac{70n^2 + 10n^2 + 50n + 170}{2n^3 - 90n - 110}, \quad z_n := \frac{n^5 - 30n^2 - 50n - 750}{200n^3 + 18n^2 + 150}.$$

Généraliser au cas d'une suite définie pour n assez grand par $u_n := P(n)/Q(n)$, où P, Q sont des polynômes non nuls à coefficients réels.

Exercice 137. Démontrer que si (u_n) a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ alors il existe un rang $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \neq 0$ et que la suite $(1/u_n)_{n \geq N}$ converge vers 0.

Exercice 138. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels qui converge vers 0. On suppose qu'il existe un rang $N \geq 1$ tel que $u_n > 0$ pour tout $n \geq N$. Démontrer que la suite $(1/u_n)_{n \geq N}$ converge vers $+\infty$. Que peut-on dire si $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 en changeant de signe ?

Exercice 139. Soit (x_n) une suite de nombres réels. Montrez que si les sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ, alors (x_n) converge vers ℓ

Exercice 140. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives et convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer (sans invoquer la continuité de la fonction racine carrée) que $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{\ell}$. On pourra traiter à part le cas $\ell = 0$.

Exercice 141. Posons $u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ pour $n \geq 0$.
1) Démontrer que

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

En déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
2) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Exercice 142. (*) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n := 1 + \frac{1}{2n} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{a_n}{8n^2}$. Montrez que $\lim_{n \to +\infty} a_n = 1$. (Indication : on pourra utiliser la méhode de l'exercice 141).

En déduire $\lim_{n \to +\infty} n^2 v_n$.

Exercice 143. Etudier la convergence des suites suivantes :

$$\begin{aligned} x_n &:= \sqrt{n^2+2n-1} - \sqrt{n^2+5n-6}, \\ y_n &:= \frac{n\sin(n!)}{n^2+n-1}, \\ z_n &:= (-1)^n \frac{3n-2}{n+5}. \end{aligned}$$

Exercice 144. Calculer les limites des suites suivantes :

$$x_n := \frac{2n^2+(-1)^n n}{3n^2+7\sqrt{5n}}, \quad y_n := n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right), \quad u_n := n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

définies pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On admettra les équivalents usuels $\sin x \sim x$ et $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0 (ici $f(x) \sim x$ au voisinage de 0 signifie que pour toute suite (u_n) qui converge vers 0 sans s'annuler et telle que $f(u_n)$ est bien défini, on a $\lim_n f(u_n)/u_n = 1$).

Exercice 145. Démontrer que :

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1+\sqrt{n}, \ \forall n \geq 0.$$

En déduire $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

Exercice 146. Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$.
1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $1-a^n \leq n(1-a)$ et en déduire que :

$$0 \leq 1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Calculer la limite suivante

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Exercice 147. On définit la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ par la formule suivante :

$$x_n := 2\cos(1/n^2) + 3\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p+1}}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Calculer x_1, x_2, x_3.
2) Démontrer que pour si n et p sont des entiers tels que $1 \leq p \leq n$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{p+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $x_n \geq 3\sqrt{n+1}-5$ et calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$. Trouver un entier N tel que $x_N \geq 235$.

Exercice 148. (*)
1) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}.$$

2) Soit $b > 1$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0.$$

Indication : Considérer l'unique entier $p \geq 1$ tel que $p \leq b < p+1$ et vérifier que pour $n \geq p+1$ on a $n! \geq (p+1)^{n-p}p!$.

3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^p}.$$

4) Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Dans l'échelle de croissance à l'infini comparer les suites $(b^n)_{n\geq 1}$, $(n^p)_{n\geq 1}$, $(n!)_{n\geq 1}$ et $(n^n)_{n\geq 1}$.

Exercice 149. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs.
1) On suppose qu'il existe un rang $p \geq 1$ et un nombre réel $\alpha \in]0,1[$ tels que pour tout $n \geq p$ on ait $u_{n+1} \leq \alpha u_n$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq p$, $0 \leq u_n \leq \alpha^{n-p} u_p$ et en déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2) Démontrer que si $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. En déduire que si $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3) *Application :* Soit $c > 1$ un nombre réel et $p \geq$ un entier. Calculer les limites suivantes :

$$\alpha := \lim_{n\to+\infty} \frac{c^n}{n!} \text{ et } \beta := \lim_{n\to+\infty} \frac{c^n}{n^p}.$$

Exercice 150. (*) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On définit la suite de ses moyennes arithmétiques en posant :

$$y_n := \frac{x_0 + \ldots + x_n}{n+1}, \quad n \geq 0.$$

1) Démonter que si la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, alors la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ. Etudier la réciproque.
2) Démontrer que le résultat est encore valable si $\ell = \pm\infty$.
3) On suppose que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est monotone. Démontrer que si la suite des moyennes arithmétiques $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.

Exercice 151. Etudier la convergence de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_n := \frac{x_0+\ldots+x_n}{n+1}$, $n \geq 0$, dans les cas suivants :

1) $x_n = (-1)^n$,
2) $x_n = (-1)^n n$.

Exercice 152. (**) Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ et α un paramètre réel tel que $|\alpha| < 1$.
1) Démontrer qu'il existe une suite unique $(x_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels telle que $x_0 = y_0$ et pour $n \geq 1$, $x_n - \alpha x_{n-1} = y_n$. (On exprimera les x_n en fonction des y_n).
2) Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{\ell}{1-\alpha}.$$

(On commencera par le cas où $\ell = 0$).

Exercice 153. (**) On rappelle que le nombre e a été défini comme $e := \lim_n x_n$ avec $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

On considère la suite définie pour $n \geq 1$ par la formule $y_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $y_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_n(k)$ avec $a_n(k) := \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$.
2. Montrer que $0 \leq a_n(k) < a_{n+1}(k) < \frac{1}{k!}$.
3. En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par e.
4. Montrer que pour $1 \leq p < n$ on a $1 + \sum_{k=1}^{p} a_n(k) < y_n < x_n$. Qu'en déduit-on lorsque n tend vers l'infini.
5. Conclure que $\lim_n y_n = \lim_n x_n$.

Exercice 154. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2^{-n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1) Démontrer que pour tout $n \geq 1$,

$$1 \leq u_n < u_{n+1} < u_n + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

En déduire que pour entier tout $n \geq 1$, $u_n < 2$.
2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et encadrer sa limite.

Exercice 155. On considère la suite définie par son premier terme x_0 et par la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2}, n \geq 0.$$

1) Montrez que la suite est de signe constant.
2) On suppose que $x_0 > 0$.
Montrez que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est monotone et qu'elle converge vers une limite que l'on calculera.

Exercice 156. (*) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + n^2}{n^2 + 1},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1) Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est nécessairement égale à 1.
2) Démontrer que si $u_0 = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n^2 - n^2)}{n^2 + 1},$$

4) Supposons que $0 \leq u_0 < 1$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5) Supposons qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $1 < u_p \leq p^2$. Démontrer que pour tout $n \geq p$ on a $1 < u_{n+1} \leq u_n$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6) Supposons que $1 < u_0 < \sqrt[4]{7}$. Démontrer que $1 < u_2 \leq 4$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
7) On suppose que $u_0 \geq 4$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 16n^3$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 157. (*) Soient $a, b > 0$ deux nombres réels positifs. On définit par récurrence deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $v_n)_{n\geq 0}$ en posant $u_0 = a, v_0 = b$ et pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+1} := \sqrt{u_n \cdot v_n}, \quad v_{n+1} := \frac{u_n + v_n}{2}.$$

(Le nombre réel u_{n+1} est appelé la moyenne géométriqe des nombres réels u_n et v_n et le nombre reél v_{n+1} est leur *moyenne arithmétique*).
1) Calculer u_1 et v_1 et les comparer.
2)Démontrer que pour tout $n \geq 1$:

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n.$$

3) Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent, puis que leurs limites sont égales.
4) En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont des suites adjacentes et que leur limite commune ℓ vérifie :

$$\sqrt{a \cdot b} \ \leq \ \ell \ \leq \ \frac{a+b}{2}.$$

Le nombre réel ℓ est appelée la *moyenne arithmético-géométrique* des deux nombres réels a et b).

Exercice 158. (*) Soient $a, b > 0$ deux nombres réels positifs. On définit par récurrence deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $y_n)_{n\geq 0}$ en posant $x_0 = a, y_0 = b$ et pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{1}{x_{n+1}} := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n}\right), \quad y_{n+1} := \frac{x_n + y_n}{2}.$$

(Le nombre réel x_{n+1} est appelé la *moyenne harmonique* des deux nombres réels x_n et y_n). On suppose que $a < b$.
1) Démonter que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(x_n + y_n)}.$$

2) Démonter que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{1}{2}(x_n - y_n).$$

3) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4) Démontrer que les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont la même limite.
5) Démontrer que la suite $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire la limite des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 159. (**) (**$\mathbb{R}$ est non dénombrable**). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels de l'intervalle I.
1) En s'inspirant du procédé de dichotomie, démontrer par récurrence sur $n \geq 0$ qu'il existe une suite décroissante de segments $[a_n, b_n] \subset I$ telle que pour tout $n \geq 0$ on ait $x_0, \cdots, x_{n+1} \notin [a_n, b_n]$ et $b_n - a_n \leq (b_0 - a_0)/3^n$.
En déduire qu'il existe un nombre réel $c \in I$ tel que $x_n \neq c$ pour tout $n \geq 0$.
2) En raisonnant par l'absurde, démontrer qu'il n'existe pas d'application surjective de $\mathbb{N}$ sur I et en déduire que I n'est pas dénombrable. En particulier $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 160. On fixe un nombre réel $a \geq 0$.
1) Démontrer que l'on définit une suite de nombres réels positifs $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant :

$$u_0 = a \ , \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n} + 1, \quad \text{si } n \geq 0.$$

2) Calculer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
3) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite ℓ.
4) Démontrer que $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{1+\ell}\,|u_n - \ell|$.
En déduire une majoration de $|u_{n+1} - \ell|$ en fonction de n et de a.

Exercice 161. (*) Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre réel tel que $a > 4$.

1) Démontrer qu'on peut définir une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par récurrence en posant $x_0 = a$ et

$$x_{n+1} = \frac{x_n - 6}{x_n - 4}, \quad n \geq 0.$$

Que se passe-t-il si $a \leq 4$?

2) Démontrer que l'application $x \longmapsto \frac{x-6}{x-4}$ possède deux points fixes α, β avec $\alpha < \beta$ que l'on déterminera.

3) On suppose que $a \notin \{\alpha, \beta\}$. On pose :

$$y_n := \frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta}, \quad n \geq 0.$$

Calculer y_{n+1} en fonction de y_n et en déduire la limite de $(x_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 162. (*) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par son premier terme $x_0 \neq -1$ et la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = \frac{3x_n - 1}{x_n + 1}, \quad n \geq 0.$$

1) Démontrer que l'application $x \longmapsto \frac{3x-1}{x+1}$ possède un seul point fixe $q \in \mathbb{R}$.
2) On suppose que $x_0 \neq q$ et on pose $y_n := \frac{1}{x_n - q}$ pour $n \geq 0$. Calculer y_{n+1} en fonction de y_n et en déduire la limite de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$.
3) Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 163. (*) Considérons la suite de Fibonacci définie par ses deux premiers termes $u_0 = 1, u_1 = 1$ et la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :

$$(F) \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad n \geq 0.$$

Pour calculer le nombre u_{21} par exemple, il suffirait à priori de calculer tous les termes $u_3, u_4, \ldots, u_{19}$ et u_{20}, ce qui est fastidieux. Il est donc naturel de se poser la question de savoir s'il existe une formule explicite donnant u_n en fonction de n. C'est l'objet de cet exercice.
1. Soit $q \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition (F) si et seulement si le nombre réel vérifie l'équation algébrique $q^2 - q - 1 = 0$.
2. Trouver les deux valeurs q_1 et q_2 du paramètre $q \in \mathbb{R}$ tel que la suite géométriques $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation (F).
3. Touver deux constantes numériques α, β tels que la suite de Fibonacci sécrive : $u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire la formule suivante donnant les nombres de Fibonacci :

$$(5.5) \qquad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right), \forall n \geq 0.$$

Observons que par définition les nombres de Fibonacci sont des entiers !

La suite de Fibonacci est en fait une suite strictement croissante d'entiers naturels qui tend donc vers $+\infty$. Cette suite a des propriétés importantes et intervient dans plusieurs domaines des sciences.