Chapitre 4

Nombres réels

Pour les mathématiciens grecs de l'école de Pythagore (VI^e siècle av. J.C.), les seuls nombres étaient les nombres rationnels. Bien qu'ils aient su que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel, et que cette grandeur est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, l'existence de telles grandeurs "incommensurables“ était pour eux un secret bien gardé. Il a fallu attendre la fin du XIX^e siècle pour que les mathématiciens comme Peano, Dedekind et Cantor notamment aboutissent par une démarche rigoureuse à la première construction du corps des nombres réels. Dans la chaine d'inclusions suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

c'est l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ qui est la plus mystérieuse et la plus délicate. Nous allons tenter de l'explorer dans ce chapitre.

La construction des nombres réels n'est pas au programme de ce cours, mais compte tenu de leur importance en Mathématique, il nous a paru utile de donner, en fin de ce chapitre, une idée de cette construction par la méthode des coupures de Dedekind. Historiquement, c'est la première construction rigoureuse, elle date de la fin du XIX^e siècle. Elle repose sur des considérations d'ordre et notamment sur la notion de **borne supérieure** que nous allons introduire et étudier en détail dans ce chapitre. En effet, il s'agit d'un outil essentiel à l'analyse mathématique.

Afin de rendre notre étude plus concrète, commençons par évoquer une autre approche possible des nombres réels, par leur écriture décimale. Ce point de vue permet une autre construction des nombres réels, qui bien qu'intuitive et naturelle, est techniquement délicate (voir par exemple l'ouvrage de référence Cours de Mathématiques L1 tout en un). Le paragraphe qui suit n'est pas rigoureux et se veut purement illustratif. Nous donnerons des preuves précises au chapitre suivant, en utilisant la notion de limite d'une suite.

Nous avons rappelé l'écriture décimale des nombres relatifs. Les nombres décimaux (qui sont le quotient d'un entier relatif par une puissance de 10) se notent aussi facilement en base 10 : ils ont un nombre fini de chiffres après la virgule. Il n'en va pas de même pour tous les nombres rationnels : si l'on pose la division de 1 par 3, l'opération ne s'arrête pas et l'on note le résultat avec des pointillés $1/3 = 0,33333\ldots$ (mais cette notation n'a pas été vraiment justifiée, nous le ferons au chapitre suivant). Plus généralement pour tout rationnel $r = p/q$ (avec disons $p, q \in \mathbb{N}^*$) si l'on pose la division de p par q soit l'opération s'arrête et r est un nombre décimal, soit elle ne s'arrête pas mais dans ce cas les décimales qui apparaîssent sont périodiques (il n'y a qu'un nombre fini de restes possibles à chaque étape $\{1, 2, ..., q-1\}$; comme il y a une infinité d'étapes un reste finit par se répéter et la suite du calcul aussi). Ainsi un nombre au développement décimal infini mais pas périodique comme

$$0,1010010001000010000010000001\ldots$$

ne peut pas correspondre à un rationnel. En fait, nous verrons que tout nombre réel admet un développement décimal illimité, mais pas forcément unique ! C'est ainsi que $1 = 0,999999999\cdots$. D'autres exemple célèbres $\sqrt{2} = 1,414213562\cdots$, $e = 2,718281828\cdots$ et $\pi = 3,141592654\cdots$

4.1 Le corps des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels, c'est à dire des fractions $\dfrac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$, est muni de deux opérations, l'addition $+$ et la multiplication, notée $\times$ ou $\cdot$, ainsi que d'un ordre $\leq$. Il possède les propriétés suivantes.

(1) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Les opérations $+$ et $\times$, ainsi que la relation d'ordre $\leq$ prolongent celles de $\mathbb{Z}$.

(2) L'addition $+$ sur $\mathbb{Q}$ vérifie les propriétés suivantes :

- (a) $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q}, \quad x + (y + z) = (x + y) + z$,
  (*associativité* de l'addition).
- (b) $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad x + 0 = 0 + x = x$,
  (0 est l'*élément neutre* pour l'addition).
- (c) Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il existe un nombre réel unique, noté $-x \in \mathbb{Q}$ et appelé l'*opposé* de x, tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0$,
- (d) $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \quad x + y = y + x$,
  (*commutativité* de l'addition).

Ces quatre propriétés se résument en disant que $(\mathbb{Q}, +)$ est un "groupe abelien" (ou commutatif).

(3) La multiplication (ou produit) notée $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes :

- (a) $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q}, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
  ("associativité" de la multiplication),
- (b) $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x$,
  (1 est l'"élément unité"),
- (c) tout $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ admet un *inverse* unique noté $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ tel que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$,
- (d) $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q}, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
  ("distributivité" de la multiplication par rapport à l'addition),
- (e) $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \quad x \cdot y = y \cdot x$,
  ("commutativité" de la multiplication)

Les propriétés (2) à (3e) se résument en disant que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un "corps commutatif".

Nous allons maintenant décrire les propriétés de la relation d'ordre $\leq$ sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et sa compatibilité avec les opérations algébriques.

(4) La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{Q}$ vérifie les propriétés suivantes :

- (a) Pour tout $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$, on a ou bien $x \leq y$ ou bien $y \leq x$,
  ($\leq$ est une *relation d'ordre total*).
- (b) Pour tout $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}$ et $z \in \mathbb{Q}$ on a $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$,
  (*compatibilité de l'addition* avec la relation d'ordre).
- (c) Pour tout $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}$ et $a \in \mathbb{Q}^+$ on a $x \leq y \Longrightarrow a \cdot x \leq a \cdot y$,
  (*compatibilité de la multiplication* avec la relation d'ordre).

(d) Pour tout $x \in \mathbb{Q}$ et tout $y \in \mathbb{Q}_+^*$ il existe un entier $N > 1$ tel que $N \cdot y > x$ ("Propriété d'Archimède").

Ces propriétés à elles seules ne suffisent pas à caractériser entièrement l'ensemble $\mathbb{Q}$. Nous verrons que le corps des nombres réels satisfait les mêmes propriétés, et aussi une propriété supplémentaire que $\mathbb{Q}$ n'a pas. Mais c'est le plus petit corps qui possède ces propriétés.

Comment construire $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$?

Nous avons déjà signalé qu'on peut construire $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$, en considérant sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ la relation d'équivalence

$$(p, q) \equiv (p', q') \iff pq' = q'p,$$

et en considérant les classes d'équivalence pour cette relation. Pour construire l'addition, on définit $(p, q)+(p', q') = (pq' + qp', qq')$ et on montre que la classe du résultat ne change pas si l'on remplace (p, q) par n'importe quel autre élément équivalent à lui, et de même pour (p', q'). Ceci permet de définir l'addition des classes. On définit de même la multiplication par $(p, q) \times (p', q') = (pp', qq')$ et on voit qu'elle satisfait les mêmes propriétés d'indépendance de la classe du résultat par rapport aux classes de (p, q) et (p', q'). Ensuite, pour l'ordre, on remarque que tout couple (p, q) est équivalent à un couple (p', q'), avec $q' > 0$ et on dit que, pour deux tels couples avec second membres positifs, $(p, q) \leq (p', q')$ lorsque $pq' \leq qp'$, et cette relation ne dépend pas non plus des représentants choisis. Il reste ensuite à faire la vérification fastidieuse de toutes les propriétés que nous avons énoncées.

4.2 Insuffisance des nombres rationnels

4.2.1 Nombres irrationnels

Il existe des grandeurs "naturelles" qui ne sont pas rationnelles. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, la diagonale d'un carré de côté 1 a une longueur x telle que $x^2 = 1 + 1 = 2$. Mais il n'existe pas de nombre rationnels dont le carré est 2 (voir par exemple l'exercice 110 page 64) :

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Ainsi, on ne peut pas "tout mesurer" avec des nombres rationnels. C'est pourquoi nous sommes amenés à considérer un ensemble de nombres plus riches, qui est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Les nombres qui ne sont pas rationnels sont dits *irrationnels*.

Nous avons observé que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Cependant nous allons voir que $\mathbb{Q}$ contient des nombres qui en sont très proches. Dans la pratique, lorsqu'on a affaire à un nombre comme $\sqrt{2}$, nous avons besoin de connaitre des valeurs rationnelles approchées de ces nombres avec une certaine précision. Nous le faisons d'habitude en écriture décimale, c'est à dire qu'on donne une valeur approchée avec un certain nombre de chiffres "après la virgule". Ces approximations sont faites par des nombres *décimaux*, c'est à dire des nombres rationnels particuliers.

Définition. *Un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ est dit décimal s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n r \in \mathbb{Z}$.*

Nous n'avons pas encore décrit mathématiquement ce qu'est l'écriture décimale d'un nombre réel ou même rationnel, mais le lecteur (la lectrice) comprend bien ce qu'est un nombre décimal : c'est un nombre dont l'écriture décimale s'arrête au bout d'un certain rang. Tous les nombres décimaux sont rationnels, mais il y a des nombres rationnels qui ne sont pas décimaux, comme par exemple 1/3.

Nous allons présenter un procédé assez simple permettant par exemple de construire des nombres rationnels (décimaux) dont le carré est arbitrairement voisin de 2 par défaut et des nombres rationnels décimaux) dont le carré est arbitrairement voisin de 2 par excès. Ces nombres décimaux seront appelés respectivement des *approximants décimaux par défaut* et des *approximants décimaux par excès* de la grandeur réelle ℓ. C'est dans ce sens là que l'on peut dire que le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ existe ! Nous allons appliquer le "procédé de dichotomie" pour démontrer cette propriété.

En effet observons d'abord que si $a, b \in \mathbb{Q}$ sont des nombres décimaux, leur moyenne arithmétique $m := (a + b)/2 \in \mathbb{Q}$ est un nombre décimal (pourquoi ?) vérifiant $a < m < b$. Si l'on représente les nombres rationnels par des points situés sur une droite orientée, le nombre rationnel m correspond au milieu du segment qui joint les points représentant les nombres a et b respectivement. Ce qui coupe en deux ce segment, d'où le nom de "procédé de dichotomie" utilisé pour qualifier cette méthode.

Choisissons deux nombres décimaux $a_0, b_0 \in \mathbb{Q}^+$ tels $a_0^2 < 2 < b_0^2$: par exemple $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$. Le nombre a_0 (resp. b_0) peut être considéré comme un premier approximant décimal par défaut (resp. par excès) de la grandeur géométrique ℓ solution de l'équation $x^2 = 2$.

Considérons ensuite le nombre décimal $m_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$. Alors, puisque l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, il n'y a que deux cas possibles.

$$\begin{cases} \text{Ou bien } m_0^2 < 2, \text{ dans ce cas on pose } a_1 := m_0 \text{ et } b_1 := b_0. \\ \text{Ou bien } m_0^2 > 2, \text{ auquel cas on pose } a_1 := a_0 \text{ et } b_1 := m_0. \end{cases}$$

Dans tous les cas on obtient un nouveau couple (a_1, b_1) de nombres décimaux positifs vérifiant $a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0$, $a_1^2 < 2 < b_1^2$ et tels que $b_1 - a_1 = \frac{b_0-a_0}{2}$.

On obtient ainsi un nouvel approximant décimal par défaut a_1 de la grandeur ℓ tel que a_1^2 soit une valeur approchée par défaut de 2 et un nouvel approximant rationnel par excès b_1 de la grandeur ℓ tel que b_1^2 soit une valeur approchée par excès de 2 vérifiant $b_1 - a_1 = \frac{b_0-a_0}{2}$, ce qui implique que l'une au moins des deux valeurs décimales approchées ainsi obtenues est plus précise que chacune des deux valeurs approchées précédentes.

En itérant ce procédé de dichotomie n fois, on construit successivement des approximants décimaux par défaut $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n$ et des approximants décimaux par excès $b_0 \geq b_1 \geq \ldots \geq b_n$ de la même grandeur ℓ tels qu'au rang n on ait $a_n^2 < 2 < b_n^2$ et l'écart entre les deux approximants est donné par $e_n := b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$.

Grâce à la propriété d'Archimède de $\mathbb{Q}$, étant donné $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* := \{x \in \mathbb{Q}; x > 0\}$, on peut trouver un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b_0-a_0}{2^N} < \varepsilon$; il suffit pour cela de prendre $N > (b_0 - a_0)/\varepsilon$ puisque $2^N > N$. Ainsi a_N et b_N sont des approximants décimaux qui donnent des valeurs décimales approchées à $\varepsilon-$près par défaut et par excès respectivement de la grandeur ℓ i.e. pour tout $a_N < \ell < b_N$ et $0 < b_N - a_N < \varepsilon$.

Mettons en pratique cette méthode en considérant par exemple comme premières valeurs approchés décimales par défaut et par excès de $\sqrt{2}$, les deux nombres réels suivants : $a_0 := 1$ et $b_0 := 2$. On a vu qu'au bout de n itérations, l'erreur par défaut ou par excès est dominée par $(b_0 - a_0) \cdot 2^{-n} = 2^{-n}$.

Si l'on souhaite déterminer une valeur approchée décimale de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par exemple (i.e. avec deux décimales exactes), il nous suffit de faire cette opération 10 fois : en effet, $2^{10} = 1024 > 10^3$, et $a_{10} < \sqrt{2} < b_{10}$, avec une différence entre les deux qui sera au plus de 10^{-3}.

On obtient successivement pour $(a_n; b_n)$:

$(1;2)$, $(1;1,5)$, $(1,25;1,5)$, $(1,375;1,5)$, $(1,375;1,4375)$, $(1,40625;1,4375)$, $(1,40625;1,421875)$,
$(1,4140625;1,421875)$, $(1,4140625;1,417968750)$, $(1,4140625;1,416015625)$, $(1,4140625;1,415039062)$.

On voit clairement que ce n'est qu'après 10 itérations que l'on obtient des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ avec trois décimales exactes et une erreur au plus égale à $0,001$. Il nous faudrait encore une itération pour avoir la garantie que $\sqrt{2}$ est inférieur à $1,415$.

Le procédé de dichotomie est assez simple mais il "converge lentement" comme on vient de le voir. Cependant il permet de localiser la solution cherchée dans un intervalle assez petit. Nous verrons des méthodes beaucoup plus rapides, c'est à dire demandant beaucoup moins de calculs, pour obtenir des estimations beaucoup plus précises. Mais cela permet de voir que a_n et b_n se rapprochent de plus en plus (convergent, comme on le dira plus tard) vers une valeur commune dont on pourra déterminer toutes les décimales au fur et à mesure.

Pour donner un sens rigoureux aux considérations heuristiques précédentes, nous introduirons au chapitre suivant les concepts de "convergence" et de "limite" d'une suite, étudier les moyens d'établir cette convergence en donnant des règles de calcul des limites dans la pratique.

En conclusion, d'un point de vue géométrique il existe bien une grandeur réelle mesurable (correspondant à une longueur) mais non rationnelle ℓ notée $\sqrt{2}$ dont le carré est 2. Cette grandeur peut être approchée par des nombres rationnels aussi bien par défaut que par excès avec une précision $\varepsilon > 0$ aussi petite que l'on veut, donnée à l'avance. Cette grandeur sera représentée par un nombre réel irrationnel, élément d'un nouvel ensemble noté $\mathbb{R}$ et appelé *ensemble des nombres réels*.

4.2.2 Borne supérieure

Certaines des définitions de cette partie seront données pour $(X, \leq)$ un ensemble ordonné. En fait nous les utiliserons uniquement pour $X = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{Q}$ ou $X = \mathbb{R}$. Cette notation nous évitera des répétitions.

Commençons par rappeler quelques définitions :

Définition (Majorant, minorant)**.** *Une partie non vide $A \subset X$ est majorée s'il existe $M \in X$ tel que $\forall x \in A,\ x \leq M$. On dit alors que M est un majorant de A.*

Une partie non vide $A \subset X$ est minorée s'il existe $m \in X$ tel que $\forall x \in A,\ m \leq x$. On dit alors que m est un minorant de A.

Définition (Maximum, minimum)**.** *On dit qu'une partie $A \subset X$ admet un plus grand élément s'il existe $a \in A$ tel que $\forall x \in A, x \leq a$. Cet élément est forcément unique et on le note $a = \max(A)$.*

Une partie $A \subset X$ admet un plus petit élément s'il existe $a \in A$ tel que $\forall x \in A, a \leq x$. Cet élément est forcément unique et on le note $a = \min(A)$.

Donc un plus grand élément est un majorant de A qui appartient à A. **Nous avons vu que toute partie non vide et majorée $A \subset \mathbb{Z}$ admet un plus grand élément. Ce n'est plus vrai dans $\mathbb{Q}$!**

Exemple. $\mathbb{Q}_-^* := \{x \in \mathbb{Q};\ x < 0\}$ est clairement une partie non-vide de $\mathbb{Q}$ majorée par 0. Mais aucun de ces éléments n'est le plus grand. En effet si $x < 0$, on a aussi $x < x/2 < 0$ (multiplier par $x < 0$ l'inégalité $1/2 < 1$). Donc étant donné $x \in \mathbb{Q}_-^*$ on peut toujours trouver un élément plus grand dans $\mathbb{Q}_-^*$.

Dans cet exemple, on voit tout de même que 0 joue un rôle particulier : il n'est pas dans l'ensemble mais il en est en quelque sorte la frontière. La définition suivant en rend compte :

Définition (Borne supérieure, borne inférieure)**.** *Soit $A \subset X$ une partie non vide et majorée. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des majorants de A. Si l'ensemble $\mathcal{M}$ admet un plus petit élément alors on dit que A admet une borne supérieure, notée* $\sup(A)$ *qui vaut par définition* $\min(\mathcal{M})$. *Entre d'autres termes* $\sup(A)$ *est* **le plus petit majorant de** A.

Si $A \subset X$ est une partie non-vide et minorée, et s'il existe un plus grand minorant de A, on l'appelle borne inférieure de A et on le note $\inf(A)$.

Proposition 12. *Si $A \subset X$ a un plus grand élément alors il admet aussi une borne supérieure et* $\sup(A) = \max(A)$.

Démonstration. — Il suffit de noter que si M est un majorant de A il est plus grand que $\max(A) \in A$. Par ailleurs $\max(A)$ est par définition un majorant de A. C'est donc le plus petit majorant. ∎

Cependant, des parties qui n'ont pas de plus grand élément peuvent admettre une borne supérieure. Dans ce cas, la borne supérieure de l'ensemble n'est pas dans l'ensemble !

Exemple. Nous avons vu que $\mathbb{Q}_-^*$ n'a pas de plus grand élément. Nous allons maintenant établir que cet ensemble admet une borne supérieure : $\sup(\mathbb{Q}_-^*) = 0$. Premièrement il est évident que 0 est un majorant (car $x \in \mathbb{Q}_-^*$ signifie $x < 0$, donc implique $x \leq 0$). Ensuite il faut montrer que tout majorant de $\mathbb{Q}_-^*$ est positif ou nul. En d'autres termes, nous devons prouver que

$$(\forall x \in \mathbb{Q}_-^*, x \leq M) \Longrightarrow 0 \leq M.$$

Il est plus commode d'établir l'assertion contraposée :

$$M < 0 \Longrightarrow (\exists x \in \mathbb{Q}_-^*, M < x).$$

Cette assertion est facile à établir : si $M < 0$ alors nous avons déjà vu que $M < M/2 < 0$. Donc il existe bien un élément $x \in \mathbb{Q}^*_-$ tel que $M < x$: on peut prendre $x = M/2$.

Une autre insuffisance de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est que certains de ses sous-ensembles qui intuitivement devraient avoir une borne supérieure, n'en ont pas :

Exemple. L'ensemble $A := \{x \in \mathbb{Q}\,;\ \ x > 1 \text{ et } x^2 < 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Intuitivement, la raison en est claire : on peut aussi écrire que $A = \{x \in \mathbb{Q}\,;\ 1 < x < \sqrt{2}\}$. Ainsi c'est $\sqrt{2}$ qui semble délimiter A à droite. Mais ce nombre n'est pas dans $\mathbb{Q}$! Très informellement, on peut dire que l'ensemble des rationnels possède des "trous" qu'il faut "boucher" pour obtenir les réels. Nous donnons maintenant une preuve détaillée du fait que $A \subset \mathbb{Q}$ n'a pas de borne supérieure :

Démonstration. — Pour cela, commençons par montrer que pour tout $r \in A$, il existe $r' \in A$ tel que $r' > r$. En effet, si $r \in A$, alors $r > 1$ et $r^2 < 2$. Choisissons $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tel que $n(2 - r^2) > 2r + 1$, ce qui est possible puisque $\mathbb{Q}$ est archimédien. Alors $r' = r + \frac{1}{n}$ est bien un élément de $\mathbb{Q}$ et vérifie $r' > r$ et $r' \in A$. La dernière propriété vient de ce que

$$r'^2 = r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} \leq r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n} = r^2 + \frac{2r+1}{n} < 2.$$

Donc, aucun élément de A ne peut être un majorant de A.

Par ailleurs, A est majoré (par 2 par exemple), il est non vide (il contient 1). Soit alors $M \in \mathbb{Q}$ un majorant de A. Alors $M^2 > 2$ En effet, d'après ce qu'on vient de voir, si $M^2 \leq 2$, alors $M^2 < 2$, puisqu'il n'existe pas de rationnel tel que $M^2 = 2$, et alors $M \in A$ et M ne peut pas être un majorant de A. En fait, tout rationnel $M > 0$ tel que $M^2 > 2$ est un majorant de A.

Or, si $M^2 > 2$, alors $N = \frac{1}{2}(M + \frac{2}{M})$ est un rationnel qui satisfait à la fois $N^2 > 2$ et $N < M$. La première inégalité vient de ce que

$$N^2 - 2 = \frac{1}{4}(M^2 + \frac{4}{M} - 4) = \frac{1}{4}(M - \frac{2}{M})^2,$$

tandis que la seconde vient de ce que

$$N < M \iff M + \frac{2}{M} < 2M \iff \frac{2}{M} < M \iff 2 < M^2.$$

Donc, pour tout majorant M de A dans $\mathbb{Q}$, il existe un majorant N de A dans $\mathbb{Q}$ tel que $N < M$. L'ensemble A n'admet donc pas de borne supérieure (dans $\mathbb{Q}$). ∎

4.3 Le corps des nombres réels

Comme d'habitude, nous allons procéder de manière axiomatique, c'est à dire que nous allons décrire l'ensemble des nombres réels par ses propriétés. Qu'un tel ensemble existe bien peut-être établi rigoureusement par une "construction", c'est à dire par un procédé qui décrit les nombres réels à partir des ensembles déjà connus (par exemple l'ensemble des nombres rationnels) et par les opérations licites de la théorie des ensembles. Il y a plusieurs façons de procéder, et nous en décrivons une à la fin de ce chapitre.

Ce qui est important, c'est que les propriétés que nous décrivons permettent de définir uniquement l'ensemble des nombres réels. Plus exactement, si deux ensembles ont ces mêmes propriétés, ils sont en bijection l'un avec l'autre, et les opérations d'addition, de multiplication et la relation d'ordre se correspondent dans cette bijection, si bien qu'on aura décrit la même chose.

Nous admettrons dans ce cours qu'il existe un ensemble $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ muni de deux opérations internes (l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\cdot$ ou bien $\times$) et d'une relation d'ordre total notée $\leq$ qui étendent les opérations internes et la relation d'ordre correspondantes sur $\mathbb{Q}$ de telle sorte que $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ soit un "corps commutatif archimédien complet". Ces propriétés sont les mêmes que celles de $\mathbb{Q}$, à l'exception d'une seule, **la propriété de la borne supérieure**. Voici la liste détaillée de ces propriétés :

(1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Les opérations $+$ et $\times$, ainsi que la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, prolongent celles de $\mathbb{Q}$.

(2) L'addition $+$ sur $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \quad x + (y + z) = (x + y) + z$,
   (*associativité* de l'addition).

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + 0 = 0 + x = x$,
   (0 est l'*élément neutre* pour l'addition).

   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un nombre réel unique, noté $-x \in \mathbb{R}$ et appelé l'*opposé* de x, tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0$,

   (d) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y = y + x$,
   (*commutativité* de l'addition).

   Ces quatre propriétés se résument en disant que $(\mathbb{R}, +)$ est un "groupe abelien" (ou commutatif).

(3) La multiplication (ou produit) notée $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes :

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
   ("associativité" de la multiplication),

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x$,
   (1 est l'"élément unité"),

   (c) tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ admet un *inverse* unique noté $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$,

   (d) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
   ("distributivité" de la multiplication par rapport à l'addition),

   (e) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \cdot y = y \cdot x$,
   ("commutativité" de la multiplication)

   Les propriétés (2) à (3e) se résument en disant que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un "corps commutatif".

   Nous allons maintenant décrire les propriétés de la relation d'ordre $\leq$ sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et sa compatibilité avec les opérations algébriques.

(4) La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a ou bien $x \leq y$ ou bien $y \leq x$,
   ($\leq$ est une *relation d'ordre total*).

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$ on a $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$,
   (*compatibilité de l'addition* avec la relation d'ordre).

   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^+$ on a $x \leq y \Longrightarrow a \cdot x \leq a \cdot y$,
   (*compatibilité de la multiplication* avec la relation d'ordre).

   (d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ il existe un entier $N > 1$ tel que $N \cdot y > x$
   ("Propriété d'Archimède").

(5) (*Propriété de la borne supérieure*).
   Toute partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
   Les propriétés de (2) à (5) se résument en disant que $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ est un "corps commutatif archimédien complet".

Remarque 4. *Attention la propriété* (4c) *n'est valable que si* $a > 0$. *Dans le cas où* $a < 0$, *on obtient l'inégalité renversée i.e.*

$$x \leq y \text{ et } a < 0 \Longrightarrow a \cdot x \geq a \cdot y.$$

En effet si $x \leq y$ *on obtient d'après* (4b), $x+(-y) \leq y+(-y)$ *et donc* $x-y \leq 0$. *En appliquant de nouveau la propriété* (4b), *on obtient* $(-x)+x-y \leq -x$ *et donc par associativité, on en déduit que* $-y \leq -x$. *En multipliant chaque membre de cette inégalité par* $-a > 0$, *on obtient l'inégalité* $(-a)\cdot(-y) \leq (-a)\cdot(-x)$ *i.e.* $a \cdot x \geq a \cdot y$.

Exercice 114. (*) Montrer que si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie non-vide et minorée, alors l'ensemble $-A := \{x \in \mathbb{R};\ -x \in A\}$ est majoré. En déduire que A admet une borne inférieure donnée par $\inf(A) = -\sup(-A)$.

On retiendra de cet exercice que **toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure**.

4.3.1 La propriété de la borne supérieure en pratique

Nous revenons un peu sur cette propriété, qui est la différence majeure entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$. La propriété qui suit est souvent très utile pour vérifier qu'un réel est bien la borne supérieure d'un ensemble A donné.

Proposition 13 (Caractérisation de la borne supérieure)**.** *Soit* $A \subset \mathbb{R}$ *une partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$, *alors le nombre réel* $\sup A$ *est caractérisé par les conditions suivantes :* $S = \sup A$ *si et seulement si*

(i) Pour tout $x \in A, x \leq S$,

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $a \in A$ *tel que* $S - \varepsilon < a \leq S$.

Démonstration. — La propriété (i) traduit le fait que S est un majorant de A et la propriété (ii) traduit le fait que tout nombre réel $S'(= S - \varepsilon) < S$ n'est pas un majorant de A autrement dit : S est un majorant de A et tous les majorants de A sont $\geq S$, donc S est le plus petit des majorants de A.
∎

Corollaire 1. *Soit* $b \in \mathbb{R}$. *Alors* $\sup(]-\infty, b[) = b$.

Démonstration. — On vérifie les deux points de la caractérisation. Premièrement, il est évident que b est un majorant de $B :=]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$. Deuxièmement : pour tout $\varepsilon > 0$, $b - \varepsilon < b - \varepsilon/2 < b$. Ainsi $a := b - \varepsilon/2$ vérifie $a \in B$ et $b - \varepsilon < a \leq b$. ∎

Il faut bien retenir que $\sup A$ **n'appartient pas forcément à** A comme le montre l'exemple précédent. Lorsque $\sup A \in A$, nous avons vu que c'est le aussi plus grand élément de A.

Exercice 115. Que vaut $\inf(]0, 1])$?.

Nous donnons ci-dessous des résultats utiles pour les estimations (majoration, minoration). Nous commençons par un résultats simple :

Proposition 14. *Soit* $A \subset \mathbb{R}$ *un ensemble qui a un plus grand élément et* $M \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$\max(A) \leq M \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ x \leq M,$$

$$\max(A) < M \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ x < M.$$

On a des résultats analogues si A *admet un plus petit élément pour* $\min(A)$.

Démonstration. — Pour les implication $\Longrightarrow$ il suffit d'utiliser que pour tout $x \in A$, $x \leq \max(A)$. Pour le sens $\Longleftarrow$, on applique la propriété pour le choix particulier $x = \max(A) \in A$. ∎

Les bornes supérieures se manipulent presque de la même manière :

Proposition 15. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide et majoré et $M \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\sup(A) \leq M \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ x \leq M,$$

$$\sup(A) < M \Longrightarrow \forall x \in A,\ x < M,$$

$$\sup(A) \leq M \Longleftarrow \forall x \in A,\ x < M.$$

On a des résultats analogues pour $\inf(A)$ *si A est non-vide et minoré.*

Attention : le différence entre la proposition 15 et la proposition 14 est que les deux derniers points ne sont pas des équivalences

Démonstration. — Pour les implications $\Longrightarrow$ il suffit d'utiliser que pour tout $x \in A$, $x \leq \sup(A)$, qui vient du fait que $\sup(A)$ est un majorant de A.

Réciproquement, si $\forall x \in A$, $x \leq M$ alors M est un majorant de A et donc $M \geq \sup(A)$ qui est le plus petit majorant de A. La dernière implication s'en déduit immédiatement puisque $x < M \Longrightarrow x \leq M$. ∎

Notons que l'on ne peut pas espérer de meilleur résultat si $\forall x \leq A,\ x < M$. En effet pour $M = 1$ et $A =]0, 1[$ cette hypothèse est vérifiée et $\sup(]0, 1[) = 1$. On retiendra que pour majorer un sup (au sens large), il suffit de majorer tous les éléments.

En fait la bonne condition pour avoir $\sup(A) < M$ est la suivante :

$$\sup(A) < M \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall x \in A,\ x \leq M - \varepsilon.$$

Elle se déduit de la première équivalence de la propriété et de l'observation simple valable pour tous $s, M \in \mathbb{R}$: $s < M \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0, s \leq M - \varepsilon$. En prenant la contraposée des deux implications de cette équivalence et de la première équivalence de la proposition 15, on obtient le résultat suivant qui explique comment minorer une borne supérieure :

Proposition 16. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide et majoré et $M \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\sup(A) > M \Longleftrightarrow \exists x \in A,\ x > M,$$

$$\sup(A) \geq M \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A,\ x \geq M - \varepsilon.$$

On a des résultats analogues pour $\inf(A)$ *si A est non-vide et minoré.*

4.3.2 Les intervalles

Il y a dans $\mathbb{R}$ plusieurs types d'intervalles :

- Les intervalles fermés bornés de la forme $[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$. Noter que $[a, a] = \{a\}$ et que $[a, b] = \emptyset$ si $a > b$.
- Les intervalles ouverts bornés $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$. On peut aussi utiliser la notation anglo-saxonne (a, b). Cet ensemble est vide si $a \geq b$.
- Les intervalles semi-ouverts bornés $]a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$ et $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$ (non-vides si et seulement si $a < b$).
- Les demi-droites fermées $[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$ et $]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$.
- Les demi-droites ouvertes $]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$ et $]-\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$.
- Il ne faut pas oublier $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Mais nous pouvons tous les décrire par une propriété commune, qui peut être fort utile en pratique

Proposition 17. *Une partie $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, $\forall x, y \in I,\ [x, y] \subset I$.*

Démonstration. — Bien sûr, tous les intervalles que nous avons décrits vérifient cette propriété. Il n'est pas évident que si I vérifie cette propriété, alors c'est l'un des intervalles. Pour le voir, on commence par se restreindre aux cas où I est non vide, et ensuite on sépare les cas où I est majoré ou non, minoré ou non. Si I est à la fois majoré et minoré, on regarde si sa borne supérieure est ou non un max, et de même pour sa borne inférieure.

Montrons par exemple que si les bornes supérieures et inférieures de I soient b et a, ne sont pas dans I, alors $I =]a, b[$. Montrons donc que $]a, b[\subset I$ (l'inclusion inverse est automatique par le fait que a est un minorant et que b est un majorant, et que ni a ni b ne sont dans I) . Soit donc x tel que $a < x < b$, et montrons que $x \in I$. Puisque a est la borne inférieure de I, et que $a \notin I$, alors il existe $x_1 \in I$ tel que $a < x_1 < x$. Maintenant, pour la même raison, il existe $x_2 \in I$ tel que $x < x_2 < b$. Puisque $[x_1, x_2] \subset I$, et que $x \in [x_1, x_2]$, alors $x \in I$.

On procède de même dans les 8 autres cas (nous laissons au lecteur (trice) le plaisir de vérifier tous ces cas par un argument similaire).

∎

Notons que cette propriété permet de voir immédiatement que l'intersection de deux intervalles (ou d'une famille quelconque d'intervalles) est un intervalle (éventuellement vide). L'union de deux intervalles n'est en général pas un intervalle, mais elle l'est si l'intersection des deux est non vide (pourquoi ?).

4.3.3 La droite réelle et la fonction valeur absolue

L'ensemble ordonné $\mathbb{R}$ peut être représenté géométriquement par une droite orientée munie d'une origine O symbolisant le nombre réel 0. Chaque nombre réel x est alors représenté par un point unique M de la droite de telle sorte que si $x > 0$ (resp. $x < 0$) le segment OM soit orienté positivement (resp. négativement) et sa longueur soit égale à la valeur absolue de x notée $|x|$.

Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue de x comme étant le plus grand des deux nombres réels x et $-x$:

$$|x| := \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Ainsi $|x|$ est toujours un nombre réel positif. Voici les propriétés essentielles de la valeur absolue :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$, (*inégalité triangulaire*)

(iii) $|x| = 0 \iff x = 0$,

(iv) $|x| \leq t \iff -t \leq x \leq t$.

Remarque 5. *La propriété* (iii) *de la valeur absolue admet une version plus raffinée, dont nous servirons souvent.*

$$\textit{Si, } \forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon, \textit{ alors } x = 0.$$

En effet, si tel n'était pas le cas, alors il existerait un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n|x| > 1$ (car $\mathbb{R}$ est archimédien) et alors le nombre $\varepsilon = 1/n$ contredirait l'hypothèse.

Ces propriétés permettent d'exprimer la notion de voisinage et de proximité dans $\mathbb{R}$. En effet soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre réel fixé et $\varepsilon > 0$ un nombre réel positif donné. Alors, un nombre réel variable x vérifie $|x - a| \leq \varepsilon$ si et seulement si x vérifie la double inégalité $a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$.

Cela veut dire que x est à une distance de a au plus égale à ε ou encore que x est voisin de a à ε près. L'ensemble ainsi obtenu :

$$\bar{I}(a,\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}; a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon\} = [a-\varepsilon, a+\varepsilon],$$

est appelé l'intervalle fermé de centre a et de rayon ε. On peut aussi considérer l'intervalle ouvert de centre de centre a et de rayon ε défini comme suit :

$$I(a,\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}; a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[.$$

D'une manière générale, si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a < b$, l'intervalle ouvert $]a,b[$ coïncide avec l'intervalle ouvert $I(c,\varepsilon)$, de centre $c := (a+b)/2$ et de rayon $\varepsilon := (b-a)/2$ (à vérifier !).

4.3.4 L'inclusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ et la fonction partie entière

Tout nombre réel est compris entre deux nombres entiers relatifs. C'est une conséquence immédiate de de la propriété d'Archimède de $\mathbb{R}$. En effet,

Proposition 4.3.1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ unique vérifiant la propriété suivante :*

$$(E) \qquad n \leq x < n+1.$$

Le nombre entier n vérifiant la propriété (E) sera noté $n = \lfloor x \rfloor$ et appelé la *partie entière* de x. Par exemple $\lfloor 2 \rfloor = 2 = \lfloor 2,5 \rfloor$, $\lfloor -2 \rfloor = -2 = \lfloor -1,5 \rfloor$ et $\lfloor -2,5 \rfloor = -3$.
Démonstration. — Observons que si $x \in \mathbb{Z}$ est un nombre entier, alors $n := x$ vérifie la propriété requise et donc $\lfloor n \rfloor = n$.
Supposons maintenant que $x \notin \mathbb{Z}$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > x$.

- Si $x \geq 0$, alors l'ensemble des entiers naturels $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq x$ est non vide (il contient 0) et majoré par N, il admet donc un plus grand élément $n \in \mathbb{N}$. Cet entier vérifie clairement la propriété requise.

- Si $x < 0$, alors $-x > 0$ est un nombre réel qui n'est pas un entier et donc l'entier $N := \lfloor -x \rfloor \in \mathbb{N}$ vérifie la propriété $N < -x < N+1$. Il en résulte que l'entier $n := -N-1$ vérifie les inégalités $n < x < n+1$, ce qui prouve que $\lfloor -x \rfloor = n = -\lfloor -x \rfloor - 1$.

∎

4.3.5 L'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et la densité des rationnels

Bien que les nombres rationnels ne remplissent pas tout $\mathbb{R}$, il y en a partout :

Proposition 18. *Soient a et b deux réels avec $a < b$. Dans l'intervalle $]a,b[$, il existe au moins un rationnel r.*

On exprime cette propriété en disant que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. — On cherche deux nombres entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $a < p/q < b$ i.e. $qa < p < qb$. Pour ce faire, grâce à la propriété d'Archimède, on commence par choisir un entier $q > 1$ tel que $q(b-a) > 1$. Alors l'entier $p := \lfloor qa \rfloor + 1$ vérifie $qa < \lfloor qa \rfloor + 1 \leq qa + 1 < qb$ et donc $qa < p < qb$ de sorte que le nombre rationnel p/q convient. ∎

Remarque 6. *S'il y a au moins un rationnel r dans l'intervalle $]a,b[$ avec $a < b$, alors il y en a une infinité, puisqu'il y en a dans $]a,r[$ et un dans $]r,b[$, et en itérant le processus, on en trouve autant que l'on veut.*

L'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ possède la même propriété.

Corollaire 4.3.2. *Pour tous nombres réels a, b tels que $a < b$, il existe un nombre irrationnel $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (et donc une infinité) tel que $a < c < b$.*

Démonstration. — En effet, comme $a < b$, on $a/\sqrt{2} < b/\sqrt{2}$ et d'après le théorème précédent, il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ tel que $a/\sqrt{2} < r < b/\sqrt{2}$, autrement dit $a < r\sqrt{2} < b$. Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, on en déduit que $r\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ce qui prouve la propriété voulue. ∎

Remarque 7. *Nous avons déjà signalé que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable, c'est à dire en bijection avec $\mathbb{N}$. On peut par contre démontrer que $\mathbb{R}$ ne l'est pas, non plus qu'aucun intervalle $]a,b[$, avec $a < b$. Il en résulte que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable, ce qui en quelque sorte signifie qu'il y a beaucoup plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels. Ainsi, il y a dans chaque intervalle $]a,b[$ non vide une infinité de nombres irrationnels (il y en a même "beaucoup plus" que de nombres rationnels).*

Cette propriété de densité des rationnels nous aurait permis de comprendre plus simplement l'exemple de la page 70, en se plaçant directement dans $\mathbb{R}$. En effet, l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{Q},\ x > 1, x^2 < 2\}$$

n'est rien d'autre que l'ensemble des rationnels r qui sont compris entre 1 et $\sqrt{2}$, ou encore $A = \mathbb{Q} \cap]1, \sqrt{2}[$. On voit donc que $\sqrt{2}$ est un majorant de A. Or, d'après la propriété de densité

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists r \in Q, r \in]\sqrt{2} - \epsilon, \sqrt{2}[.$$

D'après la caractérisation de la borne supérieure, ceci nous dit que $\sqrt{2}$ est bien la borne supérieure de A dans $\mathbb{R}$. Comme elle n'est pas dans $\mathbb{Q}$, cet ensemble n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. En fait, il faudrait démontrer que la borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ qui est $\inf\{M \in \mathbb{Q},\ M \text{ majorant de } A\}$ est aussi la borne sup dans $\mathbb{R}$, qui est $\inf\{M \in \mathbb{R},\ M \text{ majorant de } A\}$. Nous laissons ce point à vérifier par les lecteurs.

4.4 Compléments

4.4.1 Exemples d'autres corps de nombres

Il y a bien d'autres corps archimédiens K plus riches que l'ensemble $\mathbb{Q}$ et moins riches que $\mathbb{R}$. Nous donnons ici deux exemples :

L'ensemble $K = \{r + \sqrt{2}r'\ ;\ r, r' \in \mathbb{Q}\}$. Pour vérifier qu'un tel ensemble est bien un corps totalement ordonné archimédien, il n'y a pas besoin de redémontrer toutes les propriétés de l'addition, de la multiplication, et de l'ordre. En effet, ces propriétés étant vraies sur $\mathbb{R}$, elles le restent sur K. Les seules choses à démontrer sont que les opérations d'addition, de multiplication, d'opposé et d'inverse laissent stable K. Plus précisément, si $x, y \in K$, alors $x + y \in K$ et $xy \in K$, et de plus, si $x \in K$, alors $-x \in K$ et si $x \in K, x \neq 0$ alors $1/x \in K$. On pourra à titre d'exercice vérifier ces propriétés pour l'exemple considéré. Un tel corps n'a jamais la propriété de la borne supérieure. Ici, par exemple, on pourra considérer l'ensemble des $x \in K$ tels que $1 < x < \sqrt{3}$ et montrer que sa borne supérieure (dans $\mathbb{R}$), qui est $\sqrt{3}$, n'est pas dans K. Il n'a donc pas de borne supérieure dans K.

L'ensemble de nombres qui sont solution d'une équation algébrique (c'est-à-dire polynomiale) à coefficient entiers $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$. Cet ensemble s'appelle l'ensemble des nombres algébriques. Le nombre $\sqrt{2}$ en fait partie (c'est une solution de $x^2 - 2 = 0$), ainsi que toutes les diagonales des rectangles à côtés entiers. L'ensemble des nombres algébriques forme lui aussi un corps (ce n'est pas du tout évident !). On pourrait donc se contenter de considérer ces nombres. Mais cela ne suffirait pas pour calculer toutes les grandeurs "naturelles". Ainsi, le nombre π, qui mesure la surface d'un cercle de rayon 1, n'est pas algébrique. On dit que π est transcendant. C'est un résultat très difficile qui n'a été démontré qu'en 1882 par Ferdinand von Lindeman, mettant ainsi un point final au problème de *la quadrature du cercle*. Auparavant, Charles Hermite avait démontré en 1873 que le nombre e, base des logarithmes népériens, est lui aussi transcendant.

4.4.2 Une construction des nombres réels

La construction des nombres réels ne fait pas partie du programme de cette première période, mais elle est essentielle d'un point de vue conceptuel puisque toute l'Analyse mathématique est fondée sur l'existence et les propriétés du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Il nous a donc semblé utile d'essayer de donner au lecteur curieux et intéressé une idée de ce que sont les nombres réels sans pour autant l'encombrer avec des considérations trop techniques.

Il existe plusieurs constructions du corps des nombres réels. Elles sont toutes relativement délicates et par moments assez laborieuses lorsqu'il s'agit de démontrer que l'ensemble défini possède toutes les bonnes propriétés.

Nous allons présenter ici la construction de Dedekind basée sur la notion de coupures. Cette construction est importante du point de vue historique puisque c'est la première construction qui est apparue vers la fin du XIX^e siècle. En plus elle a l'avantage de permettre une définition assez simple et finalement assez intuitive de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels tout en donnant un accès assez direct à certaines propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbb{R}$ (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et théorème de la borne supérieure).

L'idée de Dedekind part de l'observation simple selon laquelle tout nombre rationnel $s \in \mathbb{Q}$ découpe l'ensemble des rationnels en deux parties : la partie $\mathbf{s}_\star$ des nombres rationnels $r \in \mathbb{Q}$ tels que $r < s$ et la partie $\mathbf{s}^\star$ des nombres rationnels $r \in \mathbb{Q}$ tels que $r \geq s$. L'une des parties suffit d'ailleurs pour déterminer l'autre puisqu'elles sont complémentaires dans $\mathbb{Q}$: $\mathbf{s}^\star = \mathbb{Q} \setminus \mathbf{s}_\star$.

Suivant la même idée, on voit ainsi que pour appréhender l'éventuelle solution de l'équation $x^2 = 2$, du point de vue des nombres rationnels, on est naturellement conduit, suivant l'idée de Dedekind, à "découper" l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels en deux parties : $D := \mathbb{Q}_- \cup \{r \in \mathbb{Q}_+; r^2 < 2\}$ et $E := \{r \in \mathbb{Q}_+; r^2 \geq 2\}$,où $\mathbb{Q}_-$ et $\mathbb{Q}_+$ désignent l'ensemble des nombres rationnels négatifs et positifs respectivement.

Il résulte du principe de dichotomie (voir paragraphe 1) que le couple (D, E) possède les propriétés remarquables suivantes :

(C.1) Les ensembles D et E forment une partition de $\mathbb{Q}$ i.e. ce sont des parties non vides et propres de $\mathbb{Q}$ complémentaires l'une de l'autre.

(C.2) Pour tout $a \in D, b \in E$, on a $a < b$.

(C.3) Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ il existe $(a, b) \in D \times E$ tel que $0 < b - a \leq \varepsilon$.

Les deux premières propriétés expriment l'idée intuitive que tous les nombres rationnels se répartissent en deux ensembles disjoints : l'ensemble D des approximants rationnels par défaut de ce "futur nombre irrationnel" positif et l'ensemble E de ses approximants rationnels par excès.

La propriété (C.3) se traduit en disant que les deux parties D et E sont *adjacentes* et exprime qu'idéalement le "meilleur" des approximants rationnels par défaut tend à coïncider avec le "meilleur des approximants rationnels par excès et que leur valeur idéale commune est le nombre réel qui manque entre tous les rationnels dont le carré est moins que 2 et ceux dont le carré est plus que 2. Enfin un trou comblé !

On peut démontrer (voir exercice 6) que dans l'ensemble totalement ordonné des nombres rationnels il n'y a pas de plus grand approximant rationnel par défaut de $\sqrt{2}$ dans le sens où D n'a pas de plus garnd élément. De même qu'il n'existe pas de plus petit approximant rationnel par excès dans le sens où E n'a pas de plus petit élément. C'est précisément ce genre de lacune qui fait de $\mathbb{Q}$ un corps totalement ordonné "incomplet". Dans ce cas précis c'est le "nombre idéal" représenté par cette "coupure" (D, E) qui représentera dans l'ensemble des coupures la solution, notée $\sqrt{2}$ de l'équation $x^2 = 2$.

Nous allons présenter la construction de $\mathbb{R}$ basée sur la notion de "coupure" due à Dedekind en insistant sur les propriétés qui nous parraissent naturelles et en ommettant les détails techniques qui sont assez laborieux.

Par définition, une *coupure de* $\mathbb{Q}$ au sens de Dedekind est un couple $c = (D, E)$ de parties de $\mathbb{Q}$ vérifiant les trois propriétés (C.1), (C.2) et (C.3) ci-dessus. On peut démontrer grâce au principe de dichotomie que la propriété (C.3) est une conséquence des deux autres propriétés.

L'ensemble D possède la propriété suivante : si $d \in D$ alors $\{x \in \mathbb{Q}; x \leq d\} \subset D$. On dira que D est une section finissante : c'est la section finissante de la coupure $c = (D, E)$. L'ensemble E possède la propriété duale suivante : si $e \in E$, $\{y \in \mathbb{Q}; y \geq e\} \subset E$. On dira que E est une section commençante : c'est la section commençante de la coupure c.

Ainsi une coupure est un couple (A, B) de parties de $\mathbb{Q}$ formant une partition de $\mathbb{Q}$ en deux *parties adjacentes* telles que A soit une section finissante, B une section commençant dans $\mathbb{Q}$.

C'est ainsi que par définition $\sqrt{2}$ est défini par la coupure (D_0, E_0), où $D_0 := \mathbb{Q}^- \cup \{r \in \mathbb{Q}^+; r^2 \leq 2\}$ et $E_0 := \{r \in \mathbb{Q}^+; r^2 \geq 2\}$.

Observer que dans cet exemple D_0 est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$ qui n'a pas de plus grand élément et que E_0 est une partie non vide et minorée de $\mathbb{Q}$ qui n'a pas de plus petit élément (voir exercice 6).

En fait une coupure $c = (A, B)$ de $\mathbb{Q}$ est entièrement déterminée par l'une de ses deux sections A ou B puisqu'elles sont complémentaires l'une de l'autre dans $\mathbb{Q}$ i.e. $A = \overline{B}$ en notant $\overline{B}$ le compl'ementaire de B dans $\mathbb{Q}$.

Tout nombre rationnel $s \in \mathbb{Q}$ définit de façon naturelle une coupure de $\mathbb{Q}$ à savoir la coupure $\mathbf{s} := (s_\star, s^\star)$, où $s^\star := \{r \in \mathbb{Q}; r < s\}$ et $s_\star := \{r \in \mathbb{Q}; r \geq s\}$.

Observer que dans ce cas la partie $s_\star$ est une section finisante qui ne possède pas de plus grand élément alors que la partie $s^\star$ est une section commençante qui a un plus petit élément qui est précisément s.

On pourrait bien sur considérer la coupure (s', s''), où $s' := \{x \in \mathbb{Q}; x \leq s\}$ et $s'' := \{x \in \mathbb{Q}; x > s\}$. La différence essentielle avec la coupure précédente étant que $s_\star$ n'a pas de plus grand élément alors que s' en a un.

Compte tenu de cette convention, on peut donc identifier une *coupure* de $\mathbb{Q}$ au sens de Dedekind à une section finissante de $\mathbb{Q}$ qui n'admet de plus grand élément. Suivant cette identification, on pose la définition suivante.

Définition 4.4.1. *On appelle coupure ou nombre réel, une partie $\alpha \subset \mathbb{Q}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
2. $\forall x \in \alpha$, $\forall y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, $x < y$,
3. *α n'a pas de plus grand élément.*

On peut facilement montrer l'équivalence des deux définitions. On désignera provisoirement par $\mathcal{C} \subset P(\mathbb{Q})$ l'ensemble des coupures au sens de cette définition. Une coupure $\alpha \in \mathcal{C}$ sera dite *rationnelle* s'il existe $s \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha = s_\star$. Il en résulte que l'application :

$$\iota : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{C}$$

qui à un nombre rationnel $s \in \mathbb{Q}$ associe la coupure qu'il définit $\iota(s) := s_\star := \{x \in \mathbb{Q}; x < s\}$ est une application injective qui permet d'identifier $\mathbb{Q}$ à un sous ensemble $\iota(\mathbb{Q})$ de $\mathcal{C}$. Une coupure $\alpha \in \mathcal{C}$ sera dite *irrationnelle* si elle n'est pas rationnelle.

Il est facile de définir une relation d'ordre sur $\mathcal{C}$. Observons tout d'abord que si s_1, s_2 sont des nombres rationnels alors on a $s_1 \leq s_2$ si et seulement si les coupures qu'ils définissent vérifient l'inclusion $\iota(s_1) \subset \iota(s_2)$. Il est donc naturel de poser la définition suivante. Si $\alpha, \alpha' \in \mathcal{C}$, on dira que $\alpha \leq \alpha'$ si et seulement si $\alpha' \subset \alpha$. Il est évident que cette relation est une relation d'ordre sur $\mathcal{C}$ qui prolonge celle de $\mathbb{Q}$ modulo l'indentification entre les nombres rationnels et les coupures rationnelles qu'ils définissent.

On peut démontrer sans trop de difficultées que $\mathcal{C}$ muni de la relation d'ordre d'inclusion est un ensemble totalement ordonné, archimédien dans lequel toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. L'objectif est donc en partie atteint.

Il résulte de cette définition qu'un nombre réel x est une coupure de $\mathbb{Q}$ représentée par un ensemble formée de tous les nombres rationnels strictement plus petit que x et dont x est la borne sup'erieure.

Cette construction permet de façon naturelle de représenter géométriquement l'ensemble des nombres réels par les points d'une droite orientée sur laquelle on a choisi une origine représentant le nombre réel 0 et un sens positif représentant la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. La propriété (C.3) exprime alors la propriété de "continuité" de l'ensemble des nombres réels à l'image des points d'une droite.

Observons également que la propriété (C.3) exprime que tout nombre réel c peut être approché, aussi bien par défaut que par excès, par des nombres rationnels avec une erreur aussi petite que l'on veut.

La partie la plus délicate et la plus technique de cette construction est celle qui consiste à munir $\mathcal{C}$ d'une addition $+$ et d'une multiplication $\cdot$ compatibles avec la relation d'ordre ci-dessus de telle sorte que $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ soit un corps commutatif dont $\mathbb{Q}$ est un sous-corps i.e. ι est un homomorphisqme de corps.

On peut démontrer que cela est possible, mais nous omettrons tous ces détails qui ne seront pas utiles dans la suite et nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 4.4.2 (Théorème de Dedekind). *L'ensemble $\mathcal{C}$ des coupures de $\mathbb{Q}$ au sens de Dedekind peut être muni d'une addition $+$ et d'une multiplication $\cdot$ compatible avec sa relation d'ordre $\leq$ de telle sorte que $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ soit un corps commutatif archimédien complet.*

Ce nouvel ensemble $\mathcal{C}$ muni de sa structure de corps commutatif, archimédien et "complet" sera noté $\mathbb{R}$ et appelé le *corps des nombres réels*.

Exercices sur le chapitre 4

Exercice 116. Démontrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Exercice 117. Soient x et y deux nombres rationnels strictement positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels. Démontrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 118. Soient x et a deux nombres réels tels que $a \neq 0$ et $|x-a| < |a|$. Démontrer que $a - |a| < x < a + |a|$ et en déduire que x est du signe de a.

Exercice 119. Soit $x \geq 0$ un nombre réel tel que $x \neq \sqrt{3}$. Posons $y := \frac{x+3}{x+1}$. Calculer $\frac{y-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$ et en déduire que $y - \sqrt{3} < x - \sqrt{3}$.

Exercice 120. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ décrits ci-dessous sont-ils majorés, minorés ? Ont-il un plus grand élément, un plus petit élément, une borne supérieure, une borne inférieure (en cas de réponse positive, donner leur valeur) ? Les ensembles suivants sont-ils des intervalles ?

1) $[0,3] \cup]2,4[$,
2) $]-\infty,3] \cap]2,\infty[$,
3) $[0,2[\cup]3,4]$,
4) $\mathbb{R} \setminus [0,3[$,
5) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$,
6) $\mathbb{Q} \cap [\sqrt{2},2]$,
7) $\{x \in \mathbb{R};\ |x-1| < 2\}$,
8) $\{x \in \mathbb{R};\ |x-1| \leq |x+1|\}$,
9) $\{x \in \mathbb{R}; \cos(x) \leq \frac{1}{2}\}$.

Exercice 121. (*) Donner une expression simple des ensembles suivants :

1) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,n]$,
2) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n,n+1]$,
3) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n,+\infty[$,
4) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \big[0, 1-\frac{1}{n}\big]$,
5) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \big[0, 1-\frac{1}{n}\big[$,
6) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \big[0, \frac{1}{n}\big[$,
7) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \big]0, \frac{1}{n}\big[$,
8) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \big]-\frac{1}{n}, 1\big[$,
9) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \big[-\frac{1}{n}, 1\big]$.

Exercice 122. Soient $A \subset B \subset \mathbb{R}$ des ensembles non vides. On suppose que B est majoré.

1) Montrer que A et majoré et qu'il admet une borne supérieure.
2) En déduire que $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 123. (*) Soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x > 0$ et $x^2 > 2$. On pose :

$$x' := \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

1) Démontrer que $x' \in \mathbb{Q}$ et vérifie $0 < x' < x$ et $x'^2 > 2$.

2) On pose $A := \{x \in \mathbb{Q}^+ ; x^2 > 2\}$.
a) Démontrer que A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{Q}$ qui n'a pas de plus petit élément dans $\mathbb{Q}$ (on pourra utiliser le résultat de la question précédente).
b) Démontrer que A n'a pas de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$. Quelle est sa borne inférieure dans $\mathbb{R}$?

Exercice 124.

1) Démontrer que l'ensemble $A := \left\{x \in \mathbb{R}^* \mid x + \dfrac{1}{x} < 2\right\}$ est un intervalle majoré et en déduire $\sup A$.

2) Démontrer que l'ensemble $B := \left\{x \in \mathbb{R}^* \mid x + \dfrac{1}{x} \leq 2\right\}$ est majoré mais n'est pas un intervalle. Calculer $\sup B$.

Exercice 125. Soient x, y deux nombres réels tels que $x < y$ et soient $z \in \mathbb{R}$ tel que $0 < z < y - x$. Démontrer qu'il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $x < mz < y$ (utiliser la propriété d'Archimède).

Exercice 126.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, démontrer qu'il existe un entier unique N tel que $x < N \leq x + 1$; Exprimer N en fonction de la partie entière de x, notée $[x]$.

2) Calculer $[x + n]$ lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 127. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$ et $z \in \mathbb{R}$.

1) Démontrer que
$$||x| - |y|| \leq |x \pm y|.$$

2) Démontrer l'équivalence suivante :
$$x \leq z \leq y \iff |x - z| + |z - y| = |x - y|.$$

Exercice 128.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, démontrer qu'il existe un entier unique N tel que $x < N \leq x + 1$; Exprimer N en fonction de la partie entière de x, notée $[x]$.

2) Calculer $[x + n]$ lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 129.

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1},$$

(On pourra utiliser les quantités conjuguées).

2) Calculer la partie entière du nombre réel

$$a := \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right).$$

Exercice 130. (**) On considère l'ensemble suivant :

$$A := \left\{x \in \mathbb{R}; \exists\, p \in \mathbb{Z}, \exists\, q \in \mathbb{Z}, x = p + q\sqrt{2}\right\}$$

et on pose $\alpha := \sqrt{2} - 1$.

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in A$, on a $nx \in A$.

2) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha^n \in A$.

3) Démontrer que $0 < \alpha < 1/2$. En déuire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < \alpha^n < 1/n$.

4) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x < y$. Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^n < y - x$ (utiliser la propriété d'Archimède).

5) En utilisant l'exercice 7, démontrer qu'il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$.

Cette propriété se traduit en disant que l'ensemble A est dense dans $\mathbb{R}$. (Comparer avec le théorème 1.4).